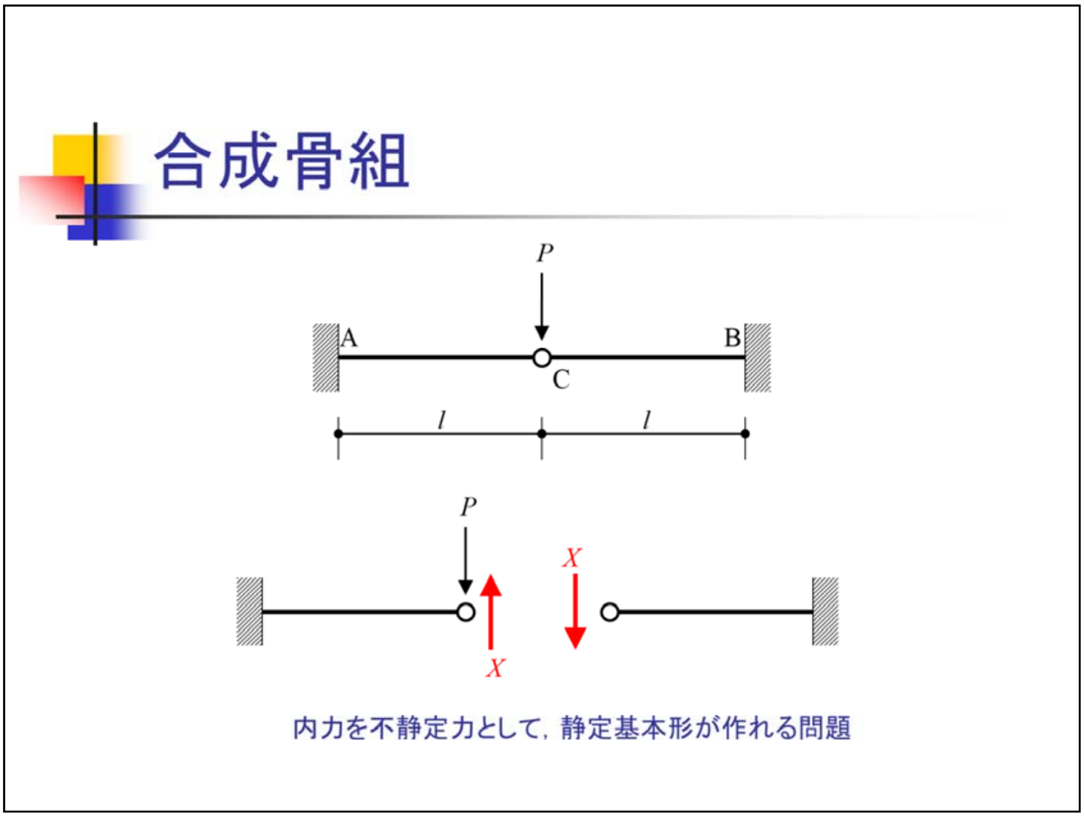
不静定力学I

合成骨組の応力
（仮想仕事法）

今回は，前回と同じ不静定問題として，合成骨組の応力（曲げモーメント）の求め方について勉強します。

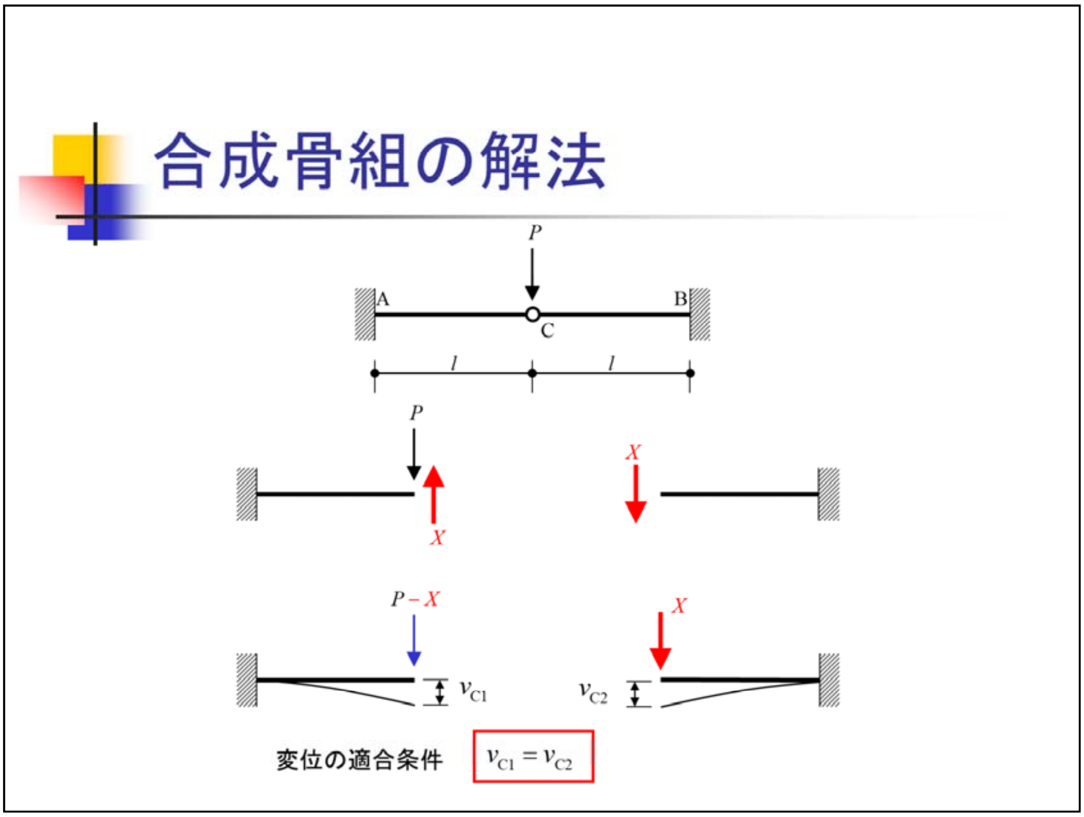


前回までの不静定骨組の問題は，反力を不静定力として静定基本形を作る問題でしたが，今回の合成骨組は，内力を不静定力として静定基本形を作る問題です。

この図に示すように，原問題は，不静定問題ですが，ピンのところで構造を2つに分けると，両方片持梁になり，静定問題となります。

しかし，構造を2つに分けると，そこに，内力が現れます。この問題では，軸力と曲げモーメントは生じないため，せん断方向の内力のみを定義します。

この内力を不静定力Xとして，変位の適合条件を作れば，前回と同様に不静定問題を解くことができます。



この問題を解くためには，前回と同様に，C点の鉛直変位の適合条件を用いて不静定力Xを求めます。

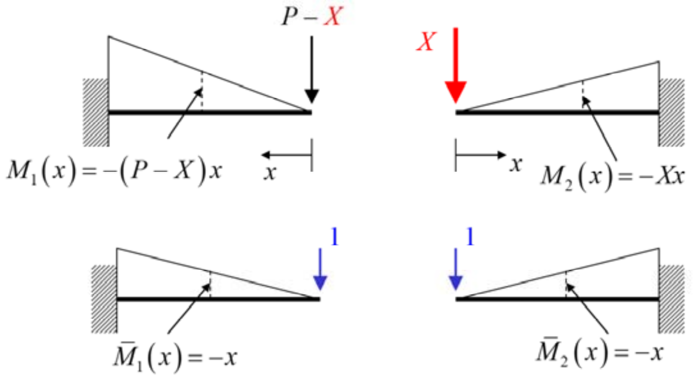
手順としては，仮想仕事法によって，左の構造と右の構造の変位δ1とδ2を求めます。

そして，δ1＝δ2となる条件を用いて不静定力Xを求めます。

最後に，右の構造のモーメント図と左の構造のモーメント図を描くことによって，合成骨組の曲げモーメントを求めます。

なお，この問題の左の構造では，不静定力Xと荷重が同じ点に作用しているので，左の構造の荷重はP＋Xとして計算できます。

仮想仕事法により変位を求める



$$1\cdot v_{\mathrm{C1}}=\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)\cdot M_1(x)}{EI}dx$$

$$1\cdot v_{\mathrm{C2}}=\int_0^l \frac{\bar{M}_2(x)\cdot M_2(x)}{EI}dx$$

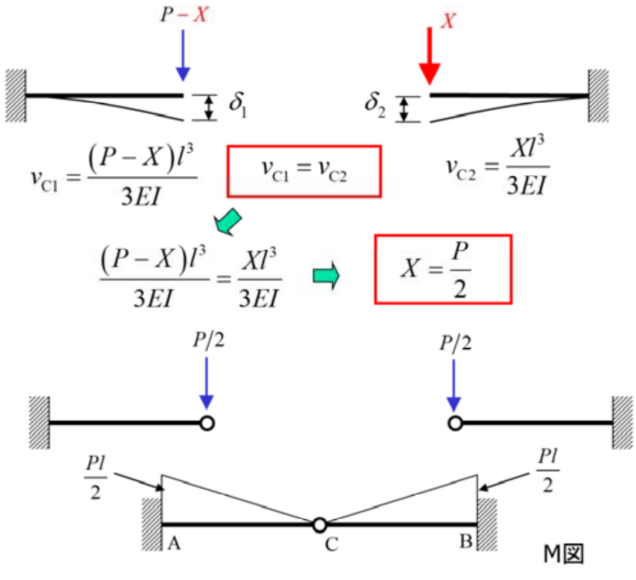
$$v_{\mathrm{C1}}=\frac{P-X}{EI}\int_0^l x^2dx=\frac{(P-X)l^3}{3EI}$$

$$v_{\mathrm{C2}}=\frac{X}{EI}\int_0^l x^2dx=\frac{Xl^3}{3EI}$$

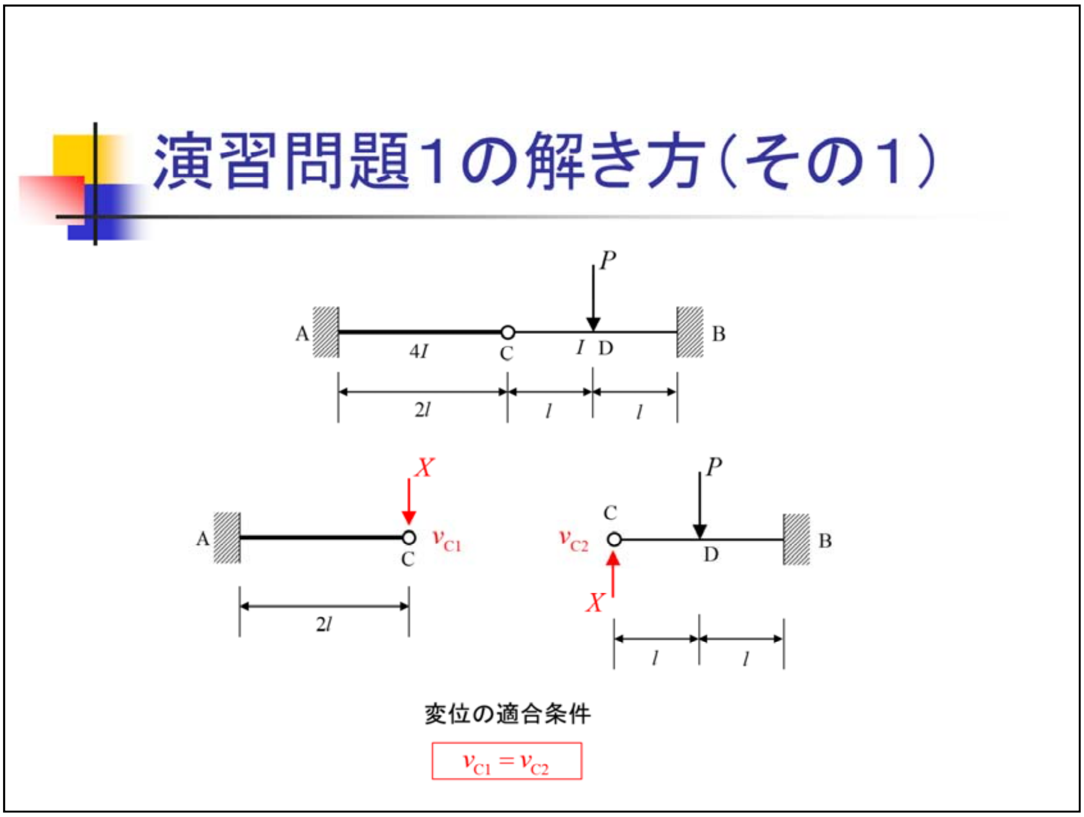
仮想仕事法を適用するために，左構造および右構造の問題に対して，変位を求める点に単位力を加える問題を定義します。

そして，仮想仕事法により，左構造の変位δ1と右構造の変位δ2を求めます。

変位の適合条件より不静定力を求め，M図を描く



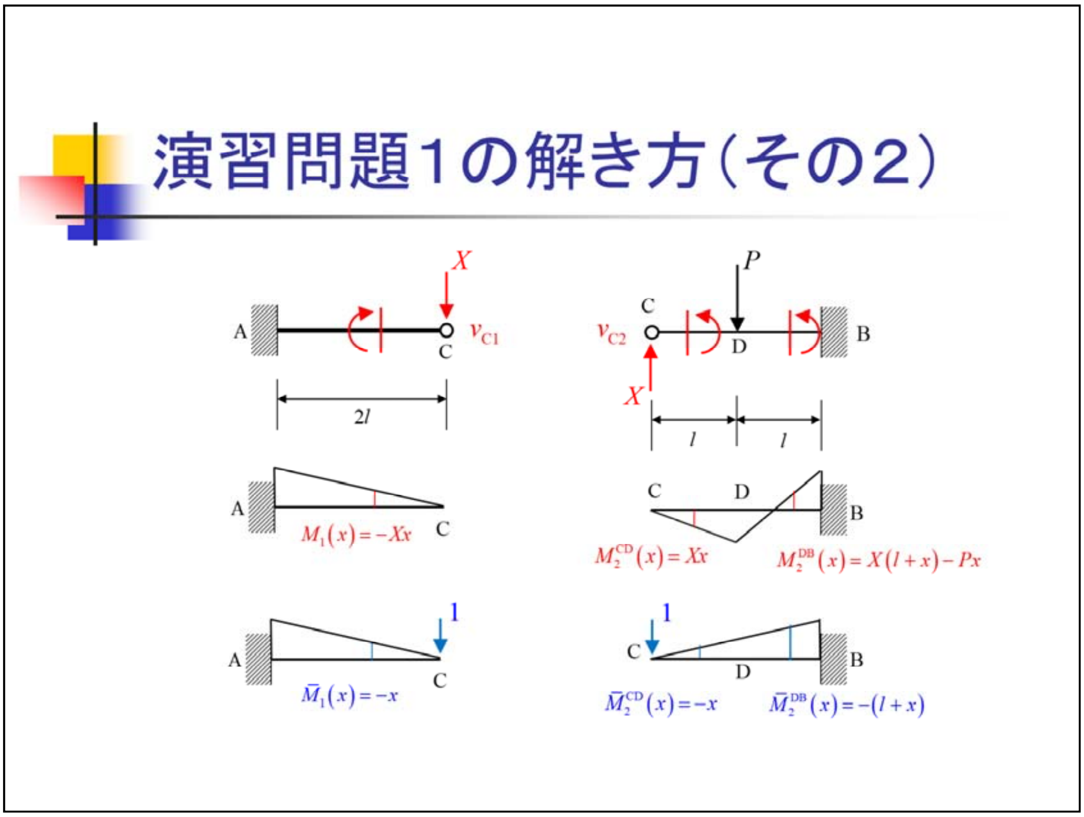
次に，δ1＝δ2の条件から，不静定力を求め，これから原問題の曲げモーメント図を描きます。



次に演習問題1の解き方について解説します。

この場合は、C点で分けて2つの片持ち梁として解きます。
2つに分けると、C点に不静定力（せん断力）Xが生じます。

そして、変位の適合条件は、2つの梁のC点の変位が連続するという条件になります。



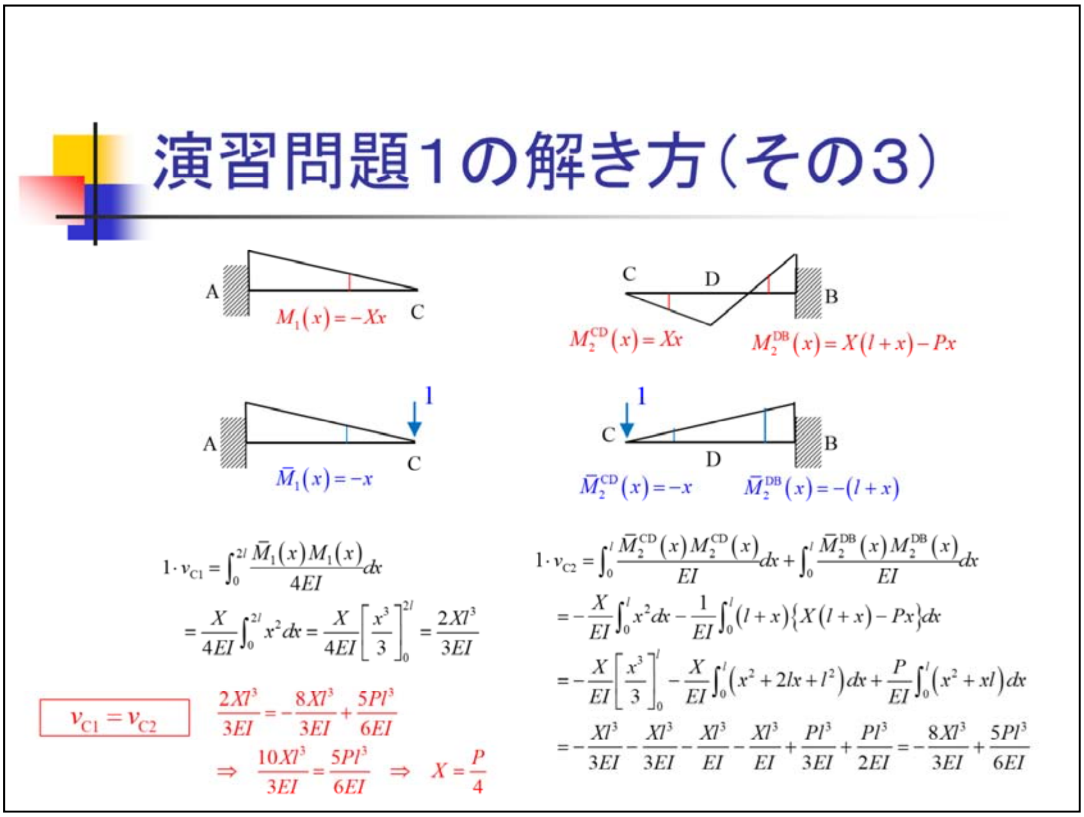
そこで、2つの梁のC点の鉛直変位を求めるために、それぞれの梁の曲げモーメント関数を求めます。

また、C点の鉛直方向に仮想荷重1を加えた仮想荷重問題を定義し、この場合の曲げモーメント関数を求めます。

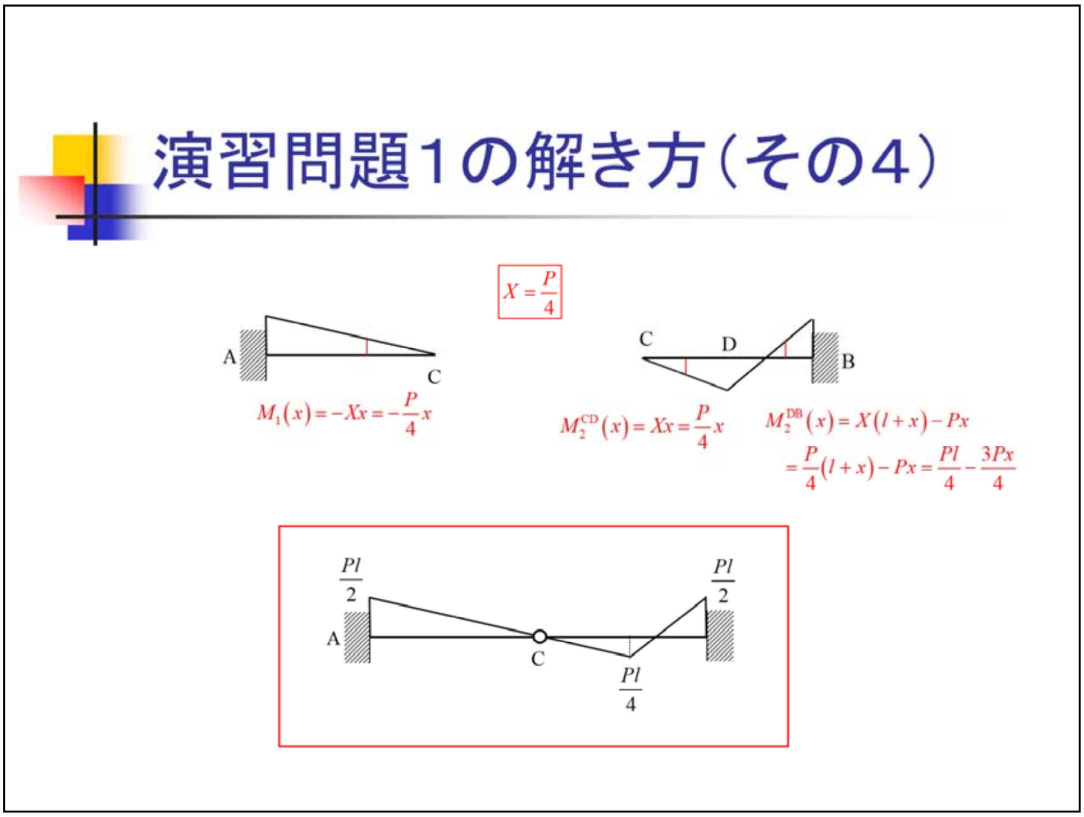
ただし、この場合の仮想荷重は、vC1=vC2の適合条件を用いる場合は、同じ方向に定義し、vC1+vC2=0の適合条件を用いる場合は、それぞれの内力の方向に定義します。

今は、前者の適合条件を用いているので、仮想荷重の向きは2つの梁で同じ方向に定義しています。

また、右の梁では、荷重点Dで曲げモーメント関数が変化するため、仮想荷重問題においても、CD間、DB間のそれぞれの曲げモーメント関数を求めておきます。



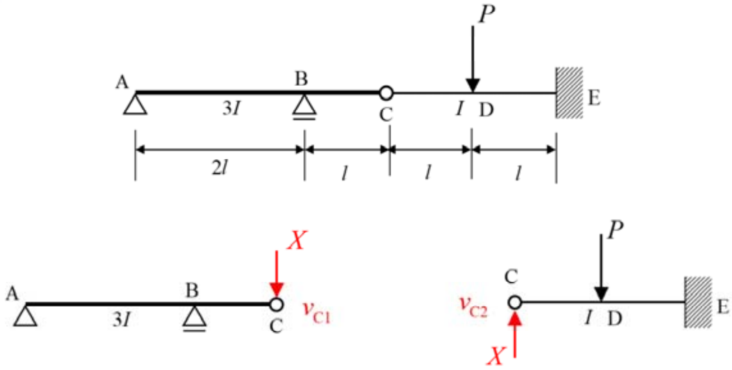
次に、仮想仕事式から、2つの梁のC点の鉛直変位vC1とvC2を求め、変位の適合条件から不静定力Xを求めます。



最後に、それぞれの梁の曲げモーメント関数に、求められた不静定力を代入し、曲げモーメント図を描きます。

曲げモーメント図には、端部および荷重点等の曲げモーメント値を記入しておきます。

演習問題2の解き方（その1）

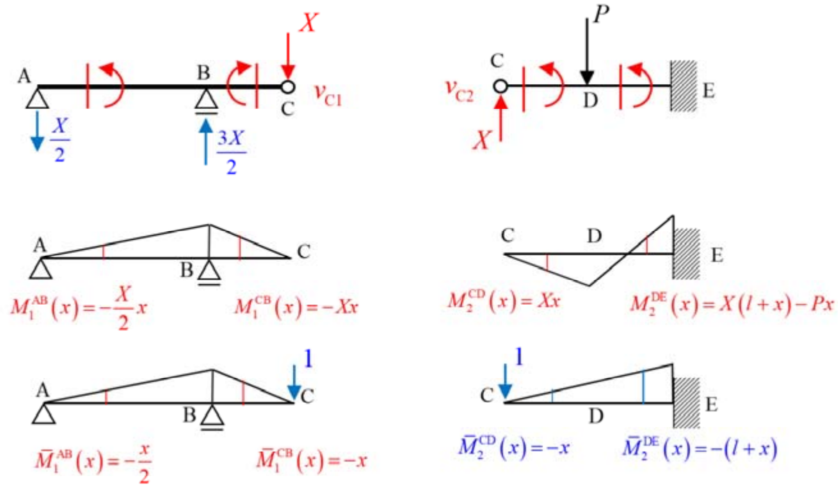


変位の適合条件

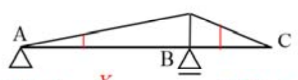
$$\boxed{v_{C1} = v_{C2}}$$

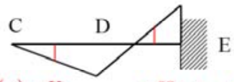
この問題は、張り出し梁と片持ち梁の合成骨組になりますが、やり方は、演習問題1と同様です。

演習問題2の解き方（その2）

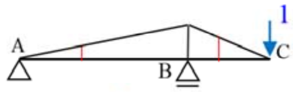


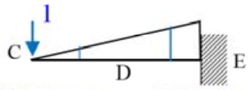
演習問題2の解き方（その3）





$M_1^{AB}(x) = -\dfrac{X}{2}x$ $\qquad M_1^{CB}(x) = -Xx$ $\qquad M_2^{CD}(x) = Xx$ $\qquad M_2^{DE}(x) = X(l+x) - Px$





$\bar{M}_1^{AB}(x) = -\dfrac{x}{2}$ $\qquad \bar{M}_1^{CB}(x) = -x$ $\qquad \bar{M}_2^{CD}(x) = -x$ $\qquad \bar{M}_2^{DE}(x) = -(l+x)$

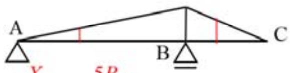
$$1 \cdot v_{C1} = \int_0^{2l} \frac{\bar{M}_1^{AB}(x) M_1^{AB}(x)}{EI} dx + \int_0^{l} \frac{\bar{M}_1^{BC}(x) M_1^{BC}(x)}{EI} dx$$
$$= \frac{X}{12EI}\int_0^{l} x^2 dx + \frac{1}{3EI}\int_0^{l} x^2 dx$$
$$= \frac{X}{12EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2l} + \frac{X}{3EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l} = \frac{2Xl^3}{9EI} + \frac{Xl^3}{9EI} = \frac{Xl^3}{3EI}$$

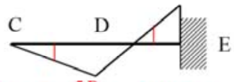
$$1 \cdot v_{C2} = \int_0^{l} \frac{\bar{M}_2^{CD}(x) M_2^{CD}(x)}{EI} dx + \int_0^{l} \frac{\bar{M}_2^{DE}(x) M_2^{DE}(x)}{EI} dx$$
$$= -\frac{X}{EI}\int_0^{l} x^2 dx - \frac{1}{EI}\int_0^{l} (l+x)\{X(l+x) - Px\} dx$$
$$= -\frac{8Xl^3}{3EI} + \frac{5Pl^3}{6EI}$$

$\boxed{v_{C1} = v_{C2}}$ $\qquad \dfrac{Xl^3}{3EI} = -\dfrac{8Xl^3}{3EI} + \dfrac{5Pl^3}{6EI} \Rightarrow \dfrac{9Xl^3}{3EI} = \dfrac{5Pl^3}{6EI} \Rightarrow X = \dfrac{5P}{18}$

演習問題2の解き方(その4)

$$\boxed{X=\frac{5P}{18}}$$

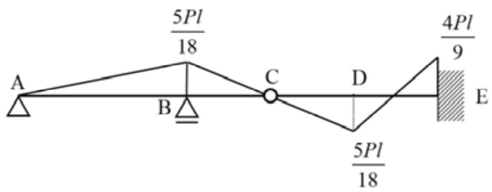


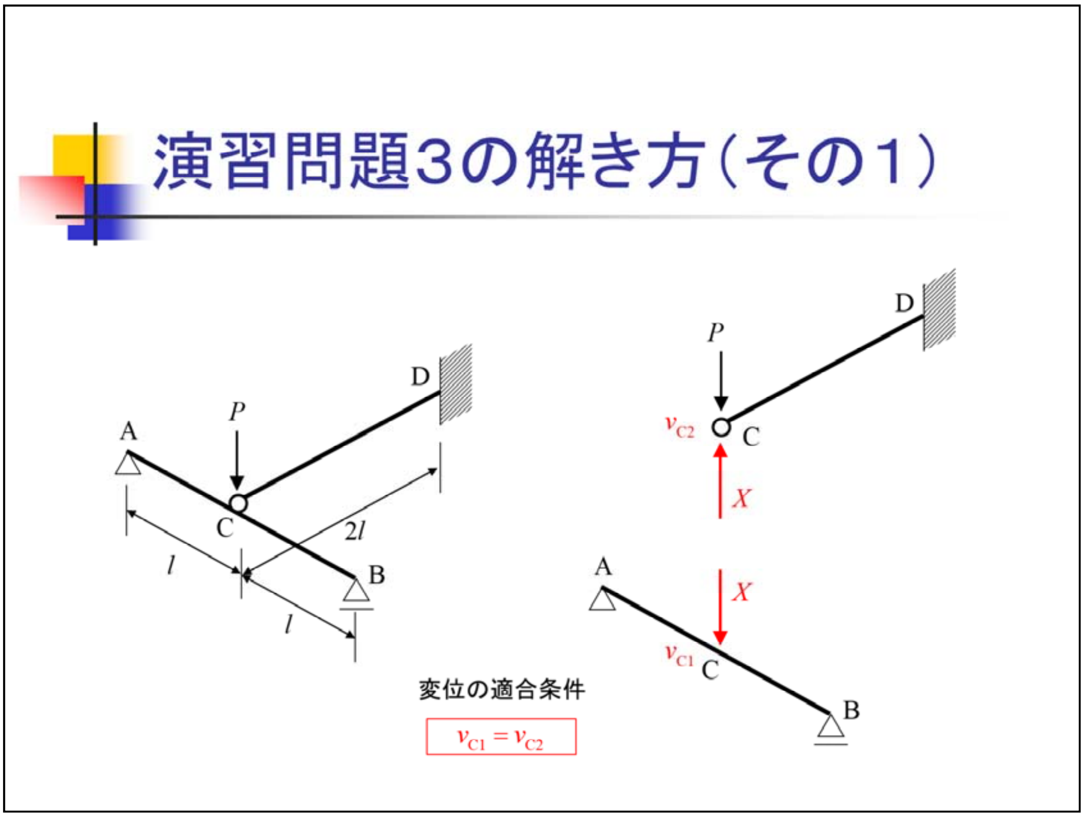


$$M_1^{\mathrm{AB}}(x)=-\frac{X}{2}x=-\frac{5P}{36}x \qquad M_1^{\mathrm{CB}}(x)=-Xx=-\frac{5P}{18}x$$

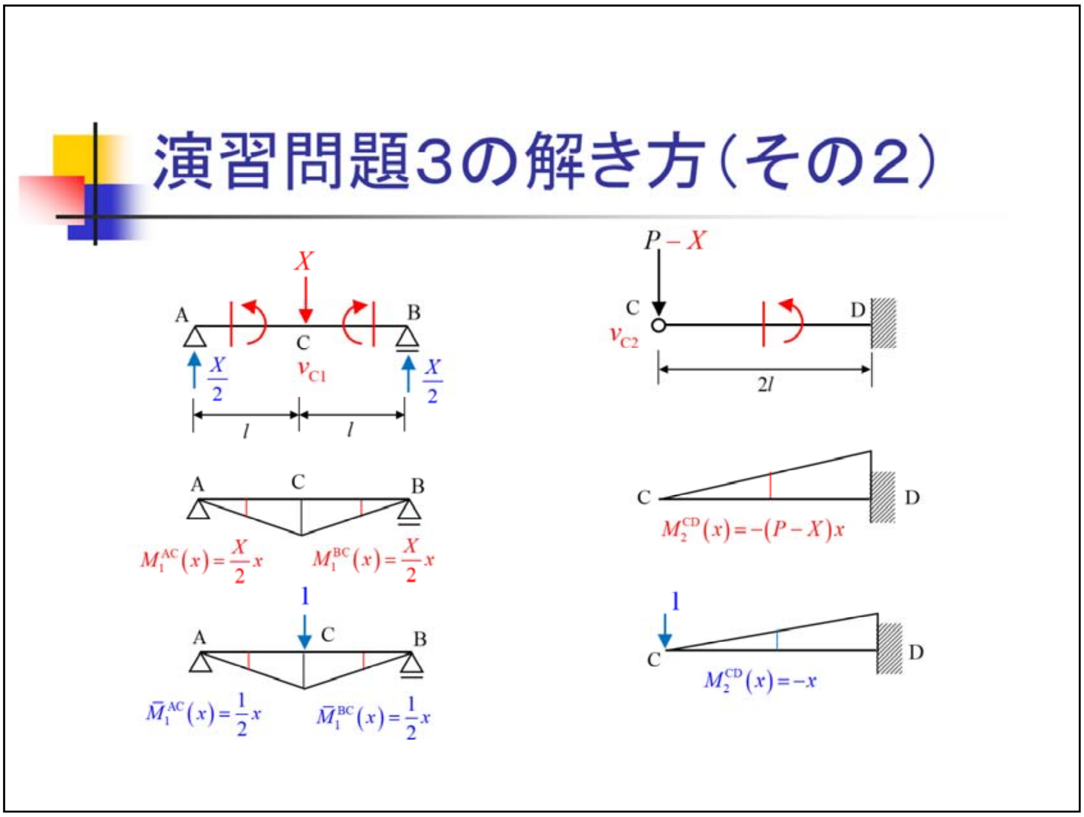
$$M_2^{\mathrm{CD}}(x)=Xx=\frac{5P}{18}x \qquad M_2^{\mathrm{DE}}(x)=X(l+x)-Px$$

$$=\frac{5Pl}{18}-\frac{13P}{18}x$$



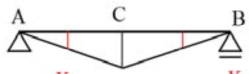


この問題は、単純梁と片持ち梁が直交している問題です。

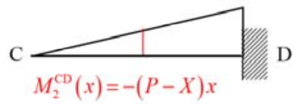


この問題も、図のように2次元で描けば、解き方は、これまでと全く同様です。

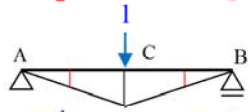
演習問題3の解き方（その3）



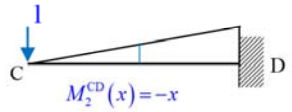
$M_1^{\mathrm{AC}}(x)=\dfrac{X}{2}x$　　$M_1^{\mathrm{BC}}(x)=\dfrac{X}{2}x$



$M_2^{\mathrm{CD}}(x)=-(P-X)x$



$\bar{M}_1^{\mathrm{AC}}(x)=\dfrac{1}{2}x$　　$\bar{M}_1^{\mathrm{BC}}(x)=\dfrac{1}{2}x$

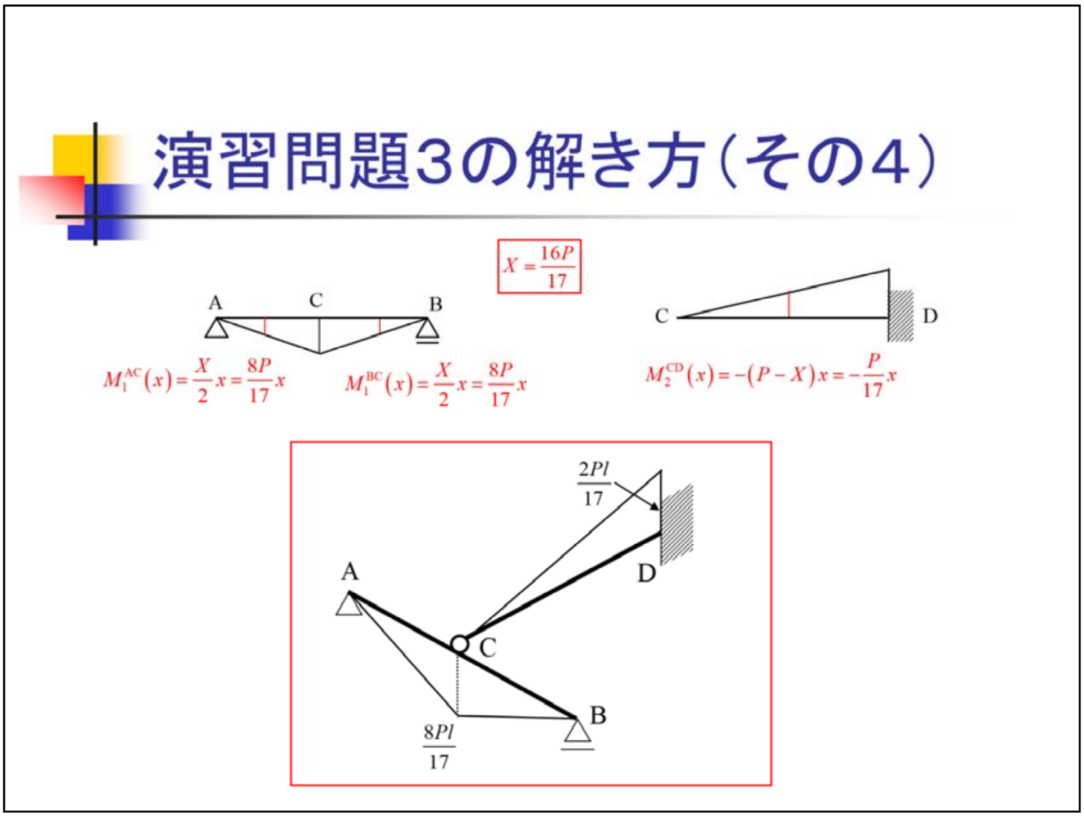


$M_2^{\mathrm{CD}}(x)=-x$

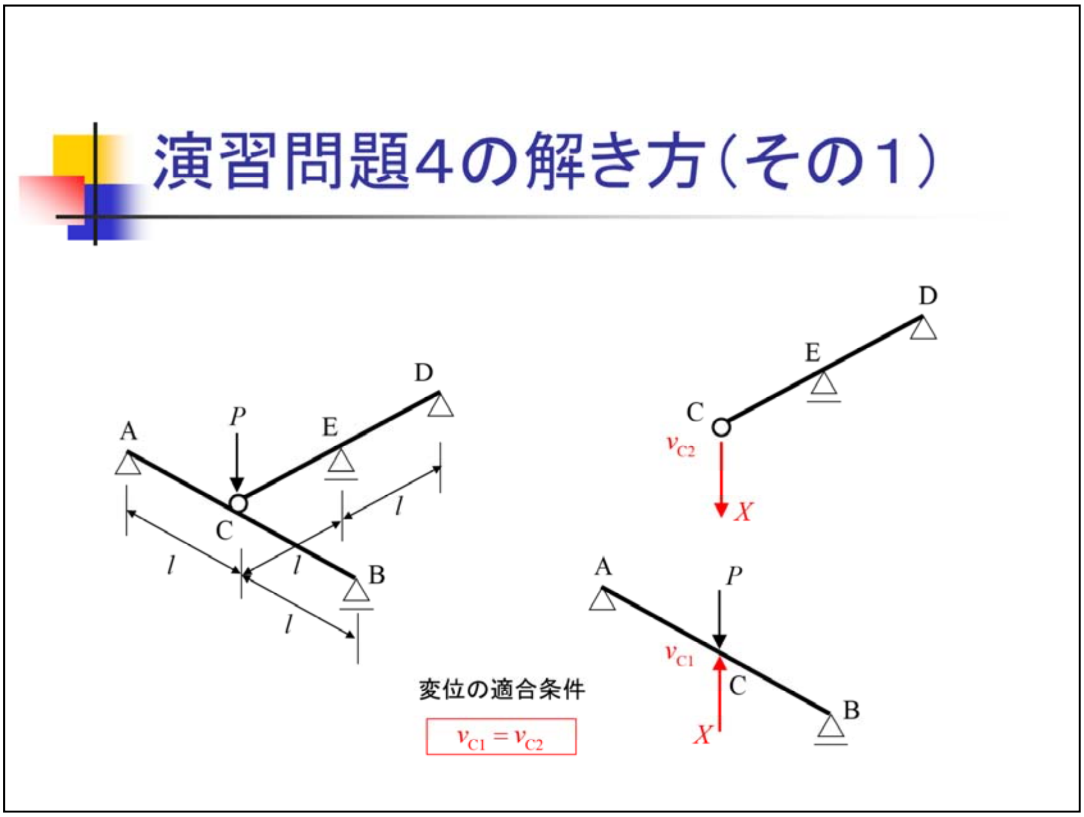
$$1\cdot v_{\mathrm{C1}}=2\times\int_0^l\frac{\bar{M}_1^{\mathrm{AC}}(x)M_1^{\mathrm{AC}}(x)}{EI}dx$$
$$=2\times\frac{X}{2EI}\int_0^l x^2dx=\frac{X}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{Xl^3}{6EI}$$

$$1\cdot v_{\mathrm{C2}}=\int_0^{2l}\frac{\bar{M}_2^{\mathrm{CD}}(x)M_2^{\mathrm{CD}}(x)}{EI}dx$$
$$=\frac{(P-X)}{EI}\int_0^{2l}x^2dx=\frac{(P-X)}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2l}=\frac{8(P-X)l^3}{3EI}$$

$\boxed{v_{\mathrm{C1}}=v_{\mathrm{C2}}}$　　$\dfrac{Xl^3}{6EI}=\dfrac{8(P-X)l^3}{3EI}\ \Rightarrow\ X=16P-16X\ \Rightarrow\ X=\dfrac{16P}{17}$

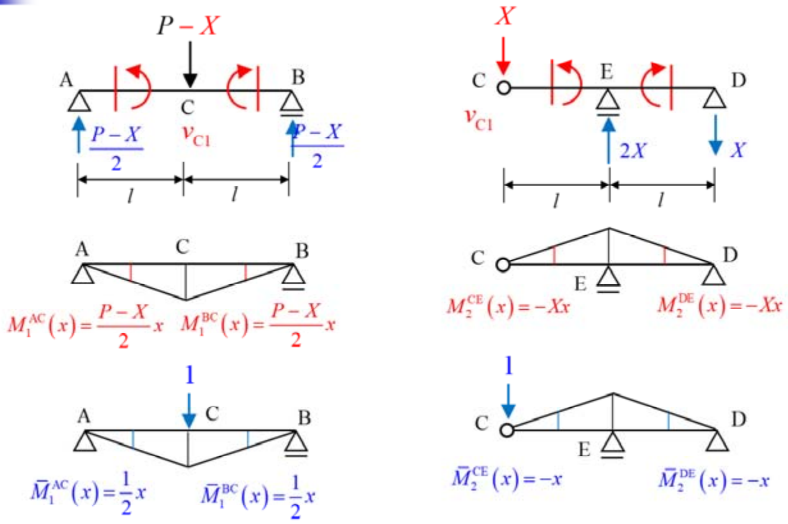


最終的な曲げモーメント図は、3次元的に描いてください。

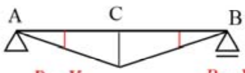


この問題は、単純梁と張り出し梁が直交している問題です。

演習問題4の解き方(その2)

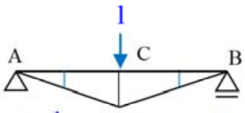


演習問題4の解き方（その3）

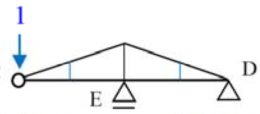


$M_1^{AC}(x)=\frac{P-X}{2}x$　$M_1^{BC}(x)=\frac{P-X}{2}x$

$M_2^{CE}(x)=-Xx$　$M_2^{DE}(x)=-Xx$



$\bar{M}_1^{AC}(x)=\frac{1}{2}x$　$\bar{M}_1^{BC}(x)=\frac{1}{2}x$



$\bar{M}_2^{CE}(x)=-x$　$\bar{M}_2^{DE}(x)=-x$

$$1\cdot v_{C1}=2\times\int_0^l\frac{\bar{M}_1^{AC}(x)M_1^{AC}(x)}{EI}dx$$
$$=2\times\frac{(P-X)}{2EI}\int_0^l x^2dx=\frac{(P-X)}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{(P-X)l^3}{6EI}$$

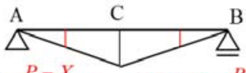
$$1\cdot v_{C2}=2\times\int_0^l\frac{\bar{M}_2^{CE}(x)M_2^{CE}(x)}{EI}dx$$
$$=2\times\frac{X}{EI}\int_0^l x^2dx=\frac{2X}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{2Xl^3}{3EI}$$

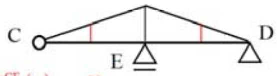
$$\boxed{v_{C1}=v_{C2}}\qquad\frac{(P-X)l^3}{6EI}=\frac{2Xl^3}{3EI}\ \Rightarrow\ P-X=4X\ \Rightarrow\ X=\frac{P}{5}$$

この問題も、2つの構造に分けて、2次元で表せば、これまでと解き方は同じです。

演習問題4の解き方（その4）

$$\boxed{X=\frac{P}{5}}$$





$$M_1^{AC}(x)=\frac{P-X}{2}x=\frac{2P}{5}x$$

$$M_1^{BC}(x)=\frac{P-X}{2}x=\frac{2P}{5}x$$

$$M_2^{CE}(x)=-Xx=-\frac{P}{5}x$$

$$M_2^{DE}(x)=-Xx=-\frac{P}{5}x$$