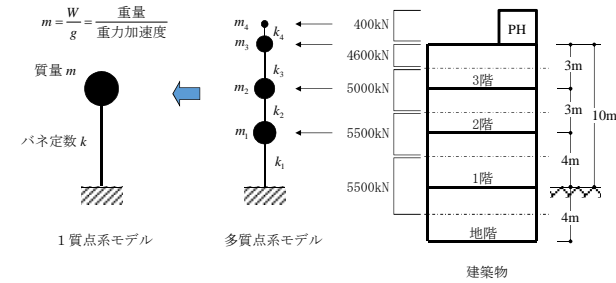


構造設計Ⅲ

第3回 建物のモデル化と1質点系の非減衰自由振動

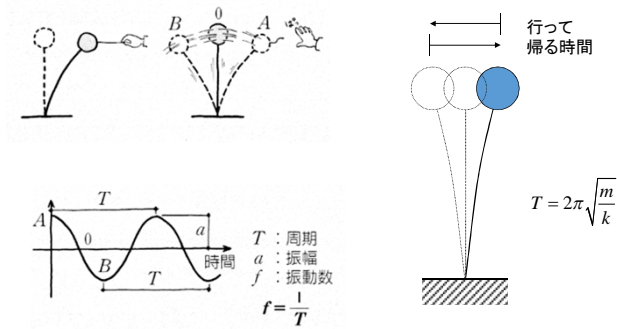
1

建築物のモデル化



2

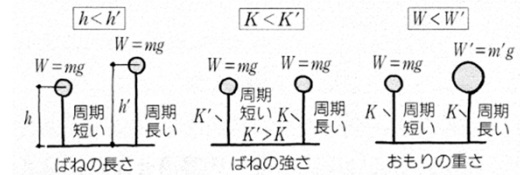
1質点系の自由振動と固有周期



3

固有周期Tの特性

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



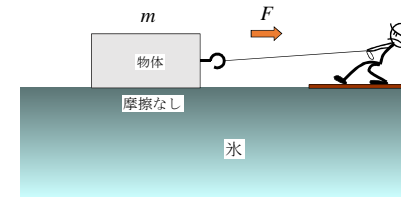
4

固有周期はどのように導かれる？

- 自由振動方程式を立てて、これを解くことによって求められる。
- 自由振動方程式を立てるには、まず、慣性力について理解する必要がある。

5

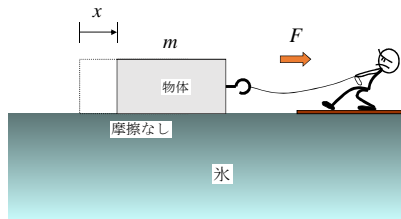
慣性力



つるつるの氷の上でも重いものを動かすには力がある。
また、質量が大きいほど大きな力が必要。

6

慣性力



力を入れるとやがて物体は動き出す。
この時の力と物体の質量との関係は？

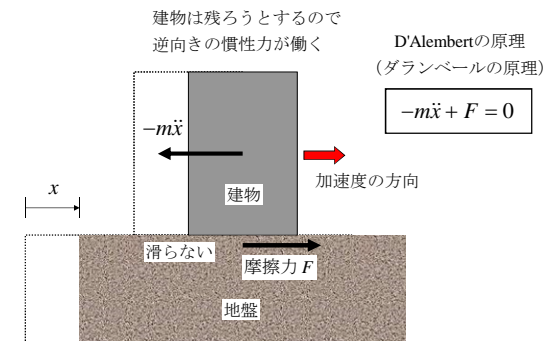
$$F = ma$$

(ニュートンの第2法則)

F : 力 m : 質量
 a : 加速度 $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$
 t : 時間

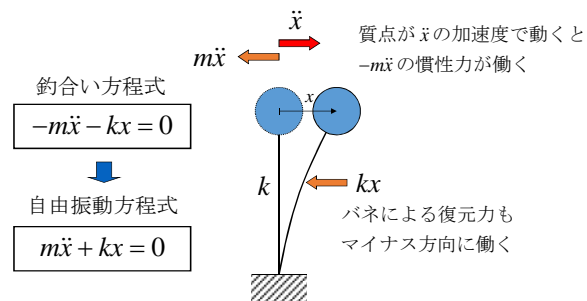
7

地盤が動いた場合はどうなる？



8

1質点系の運動



9

自由振動方程式の解法

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad \dot{x}: \text{速度}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \alpha x \quad \alpha \text{ は定数}$$

x の2階微分が x の定数倍になる

$$\ddot{x} = -p^2 A \sin pt = -p^2 x \quad \Rightarrow \quad x = A \sin pt$$

$$\ddot{x} = -q^2 B \cos qt = -q^2 x \quad \Rightarrow \quad x = B \cos qt \quad B, q \text{ は定数}$$

$$p = q = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad A, B \text{ は定数}$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \text{: 固有円振動数}$$

10

2階の微分方程式の解

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

t に関して2階の微分方程式だから1階積分すると未定係数が1つ、2階積分すると未定係数が2つになる。

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

未定係数を決めるためには、1階積分の速度と2階積分の変位の初期値を与える必要がある。

$$t=0 \text{ の変位の初期値} \quad x(t=0) = d_0$$

$$t=0 \text{ の速度の初期値} \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

11

未定係数の決定

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

初期条件

$$x(0) = B = d_0 \quad \text{: 初期変位}$$

$$\dot{x}(0) = A\omega = v_0 \quad \text{: 初速度}$$

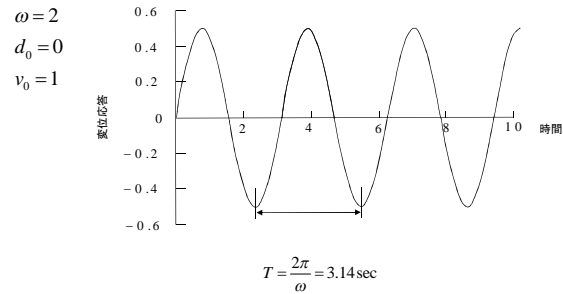
$$x(t) = (v_0/\omega) \sin \omega t + d_0 \cos \omega t$$

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \omega t - d_0 \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -v_0 \omega \sin \omega t - d_0 \omega^2 \cos \omega t$$

12

振動の様子



13

固有周期と固有振動数

固有周期 T は $\omega t = 2\pi$ となる時間

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

固有振動数 f は 1 秒間の振動数

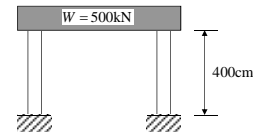
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

14

演習問題

図に示す構造物の固有周期を求めよ。
 ただし、鉄筋コンクリート造とし、
 柱の断面は $30\text{cm} \times 30\text{cm}$ とする。
 はりの剛度は無限大と仮定する。

$$E = 2100 \text{ kN/cm}^2$$



$$\begin{cases} M_{AB} \\ M_{BA} \end{cases} = 2E \frac{I}{H} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -R \\ -R \end{Bmatrix}$$

$$Q_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{H} \quad R = \frac{\delta}{H}$$

$$M_{AB} = -\frac{6EI}{H} R = -\frac{6EI}{H^2} \delta$$

$$M_{BA} = -\frac{6EI}{H} R = -\frac{6EI}{H^2} \delta$$

$$Q_{AB} = \frac{12EI}{H^3} \delta$$

$$k = \frac{Q_{AB}}{\delta} = \frac{12EI}{H^3}$$

1本の柱のバネ剛性

15

演習問題の解答

$$E = 2100 \text{ kN/cm}^2$$

$$I = \frac{30 \times 30^3}{12} \text{ cm}^4$$

$$H = 400 \text{ cm}$$

$$k = \frac{12EI}{H^3} \times 2 = \frac{12 \times 2100 \times 30^4}{400^3 \times 12} \times 2 = 26.6 \times 2 = 53.2 \text{ kN/cm}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{500}{980} = 0.51 \text{ kN} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}$$

重力加速度

$$g = 9.8 \text{ m/sec}^2$$

$$g = 980 \text{ cm/sec}^2$$

$$g = 9800 \text{ mm/sec}^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.51}{53.2}} = 0.615 \text{ sec}$$