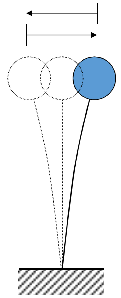
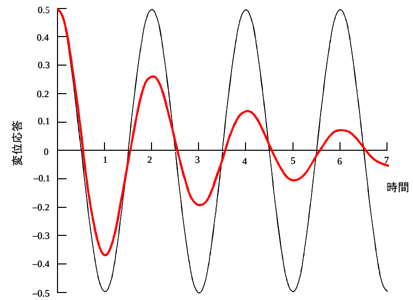
構造設計Ⅲ

第４回・第５回
建物の減衰自由振動の定式化と解法

減衰があるから建物の振動は収まる





減衰力によって地震に耐える

- 摩擦力による減衰
- 塑性化することによるエネルギー吸収


1 土壁で衝撃力を削ぐ

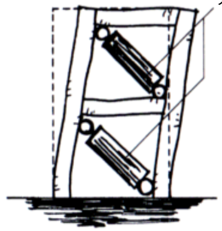
剛構造

第一の防御線が土壁だ。建物の要所に設けられ、揺れを抑える。しかし、限界を超えたら固い塗り土だけが壊れる。地震のエネルギーのかなりの部分がこの塗り土を壊すのに使われる

塗り土が割れて落ちた造り酒屋の蔵。柱など木の構造に被害はなかった=輪島市門前町で

2007年5月17日の朝日新聞記事

制震構造は建物にダンパーを設置

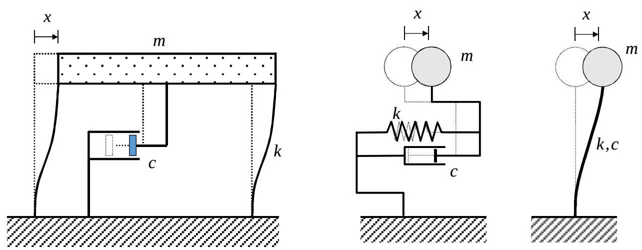


振動が早く収まる.
骨組への損傷が軽減される.

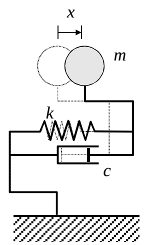
バイクのダンパー

自動車のダンパー

モデル化



自由振動方程式



$$-m\ddot{x}-c\dot{x}-kx=0$$

減衰力は速度に比例する

自由振動方程式

$$\boxed{m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

自由振動方程式の解き方

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0}$$

この形の方程式の解はexp関数

$x=Ae^{\lambda t}$　　A,λ は定数

振動方程式に代入すると

$$m\lambda^2\cdot Ae^{\lambda t}+c\lambda\cdot Ae^{\lambda t}+k\cdot Ae^{\lambda t}=0$$

$$m\lambda^2+c\lambda+k=0$$

$$\boxed{m\lambda^2+c\lambda+k=0}$$

$$\lambda=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$$

$$=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{c^2-4mk}{4m^2}}$$

$$=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_1=-\frac{c}{2m}+\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2=-\frac{c}{2m}-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$

2次方程式の解の導出

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

減衰自由振動の解

$$x = A\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$ A, Bは任意定数

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$\mathrm{e}^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ より

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(\underbrace{(A+B)}_{A}\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right] + i\underbrace{(A-B)}_{B}\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right] + B\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

↑

減衰自由振動を表す式

A, Bは任意定数

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{-i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

$\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \le 0$ のとき　　$\frac{k}{m} \le \left(\frac{c}{2m}\right)^2$:バネよりも減衰が大きい

$$x = \mathrm{e}^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t}\right)$$

⇩

振動は生じない

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$ c_c:臨界減衰

$$c_c = 2\sqrt{mk}$$

減衰定数

$$h = \frac{\text{減衰}}{\text{臨界減衰}} = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$ ⇦ 無次元量

⇩ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$mh = \frac{c}{2\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\omega}$$

⇩

$$c = 2mh\omega$$

減衰自由振動解

$$x = e^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]+B\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c}{2m}\right)^2}\right)t\right]\right)$$

$$\downarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad c=2mh\omega$$

$$\boxed{x = e^{-h\omega t}\left(A\cos\left[\left(\sqrt{1-h^2}\right)\omega t\right]+B\sin\left[\left(\sqrt{1-h^2}\right)\omega t\right]\right)}$$

13

初期条件

未定係数A,Bは初期条件を与えることによって決まる

$$x(0)=d_0,\quad \dot{x}(0)=v_0$$

$$x = e^{-h\omega t}\left(d_0\cos\sqrt{1-h^2}\,\omega t+\frac{v_0+h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\,\omega}\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t\right)$$

14

固有周期

$$x = e^{-h\omega t}\left(d_0\cos\boxed{\sqrt{1-h^2}\,\omega t}+\frac{v_0+h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\,\omega}\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega t\right)$$

$\sqrt{1-h^2}\,\omega T' = 2\pi$ より

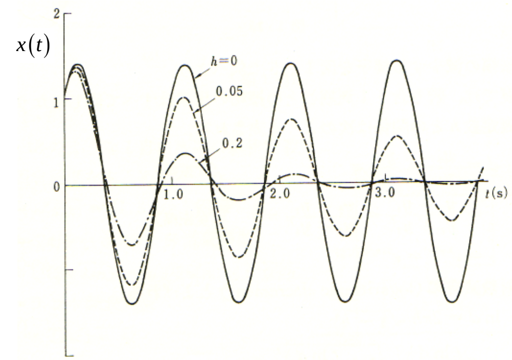
$$T'=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}T$$

hが小さい場合は,

$$T'\simeq T$$

15

減衰振動のグラフ



16