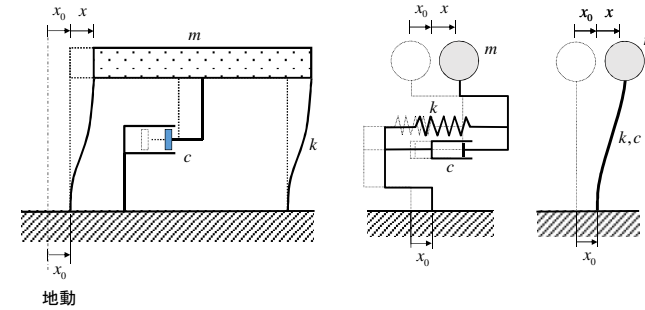


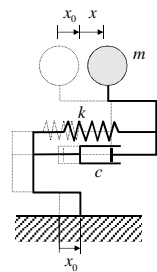
構造設計Ⅲ

第8回 1質点系の地震応答解析の方法

モデル化



運動方程式



$$-m(\ddot{x} + \ddot{x}_0) - c\dot{x} - kx = 0$$

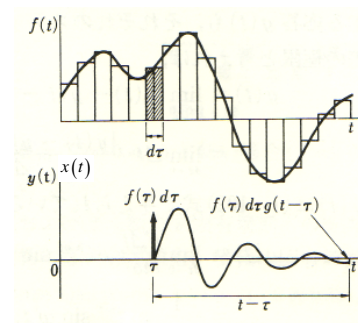
地動加速度

運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_0$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = -m \frac{d^2 x_0}{dt^2}$$

外力をインパルス外力の連続と考える



インパルス外力

$$f(\tau) d\tau$$

単位インパルス外力による応答変位

$$g(t - \tau)$$

インパルス外力による応答変位

$$f(\tau) d\tau g(t - \tau)$$

↓
応答変位 $x(t)$ は次式となる

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

単位インパルス外力に対する応答変位

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = \delta(t)$$

デルタ関数

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt = x(\tau)$$

この方程式の解は初速度1
($d_0=0, v_0=1$)の自由振動解となる

$$g(t) = e^{-h\omega t} \left(d_0 \cos \sqrt{1-h^2} \omega t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}} \sin \sqrt{1-h^2} \omega t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega t} \sin \sqrt{1-h^2} \omega t = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega t} \sin \omega' t$$

$$\ddot{x} + 2h\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_0$$

$$f(\tau) = -\ddot{x}_0(\tau)$$

$$g(t-\tau) = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau)$$

であるから、解は、

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$= -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

速度と加速度は？

$$x(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau - h\omega x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -2h\omega\dot{x}(t) - \omega^2 x(t) - \ddot{x}_0(t)$$

変位応答が求まれば、速度、加速度応答は簡単に求まる

どうやって計算する？

$$x(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

三角関数の加法定理を利用すると

$$x(t) = A(t) \sin \omega' t - B(t) \cos \omega' t$$

ここで

$$A(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau$$

$$B(t) = -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega' \tau d\tau$$

A(t)を増分形で表す

$$\begin{aligned}
 A(t) &= -\frac{1}{\omega'} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau \\
 &= -\frac{1}{\omega'} \int_0^{t-\Delta t} \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\Delta t-\tau+\Delta t)} \cos \omega' \tau d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{\omega'} \int_{t-\Delta t}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau \\
 &= A(t-\Delta t) e^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'} \int_{t-\Delta t}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau
 \end{aligned}$$

B(t)も同様に増分形で表すと

$$\begin{aligned}
 A(t) &= A(t-\Delta t) e^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'} \int_{t-\Delta t}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau \\
 B(t) &= B(t-\Delta t) e^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'} \int_{t-\Delta t}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \sin \omega' \tau d\tau
 \end{aligned}$$

このように変形すれば、前ステップの値に、増分値を逐次加えてゆけばよい
ただし、第2項の積分は解析的には行えないので、数値的に積分する。

数値積分法

A(t)の第2項の計算

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{\omega'} \int_{t-\Delta t}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega' \tau d\tau \\
 &\approx -\frac{1}{\omega'} \sum_{i=1}^2 w_i \ddot{x}_0(\tau_i) e^{-h\omega(t-\tau_i)} \cos \omega' \tau_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで} \quad \tau_i &= t - (\Delta t/2) + (\Delta t/2) \xi_i \\
 w_i &= (\partial \tau_i / \partial \xi_i) \eta_i = (\Delta t/2) \eta_i
 \end{aligned}$$

ξ_i, η_i はGaussの数値積分の選点と重み係数

$$\xi_1 = -0.57735026918963, \quad \xi_2 = 0.57735026918963, \quad \eta_1 = \eta_2 = 1$$

以上から

$$x(t) = A(t) \sin \omega' t - B(t) \cos \omega' t$$

$$\begin{aligned}
 A(t) &= A(t-\Delta t) e^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'} \sum_{i=1}^2 w_i \ddot{x}_0(\tau_i) e^{-h\omega(t-\tau_i)} \cos \omega' \tau_i \\
 B(t) &= B(t-\Delta t) e^{-h\omega\Delta t} - \frac{1}{\omega'} \sum_{i=1}^2 w_i \ddot{x}_0(\tau_i) e^{-h\omega(t-\tau_i)} \sin \omega' \tau_i
 \end{aligned}$$

$$\tau_i = t - (\Delta t/2) + (\Delta t/2) \xi_i, \quad w_i = (\Delta t/2) \eta_i$$

$$\xi_1 = -0.57735026918963, \quad \xi_2 = 0.57735026918963, \quad \eta_1 = \eta_2 = 1$$

$$\text{初期条件} \quad A(0) = 0, \quad B(0) = 0$$

速度と加速度は？

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h\omega(t-\tau)} \cos \omega'(t-\tau) d\tau - h\omega x(t)$$

$$= \omega' \{A(t) \cos \omega't + B(t) \sin \omega't\} - h\omega x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -2h\omega \dot{x}(t) - \omega^2 x(t) - \ddot{x}_0(t)$$