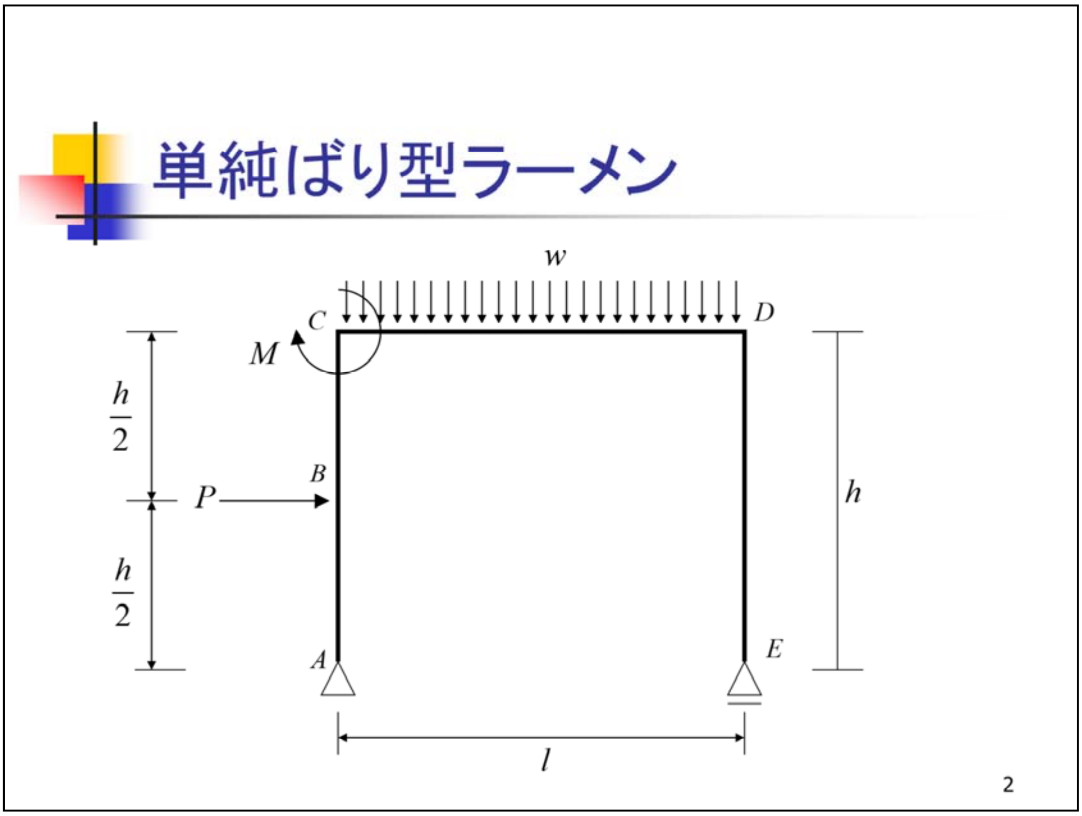
静定力学講義(9)

静定ラーメンの応力(1)

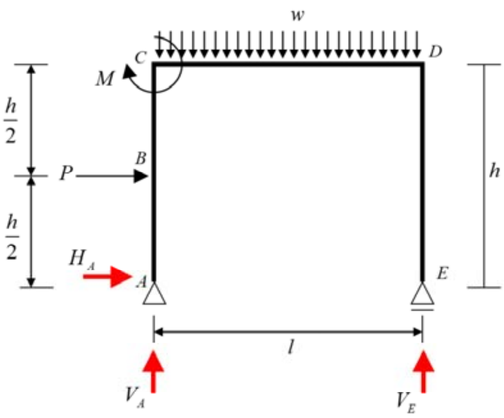
1

ここでは，静定ラーメンの応力(断面力)の求め方について学びます。



まず，ピンとローラーで支持される単純支持ばり型のラーメン構造の応力の求め方について説明します。

まず反力を求める



$\sum X = 0$ より

$H_A + P = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -P$

$\sum Y = 0$ より

$V_A + V_E - wl = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = wl - V_E$

$\sum M_A = 0$ より

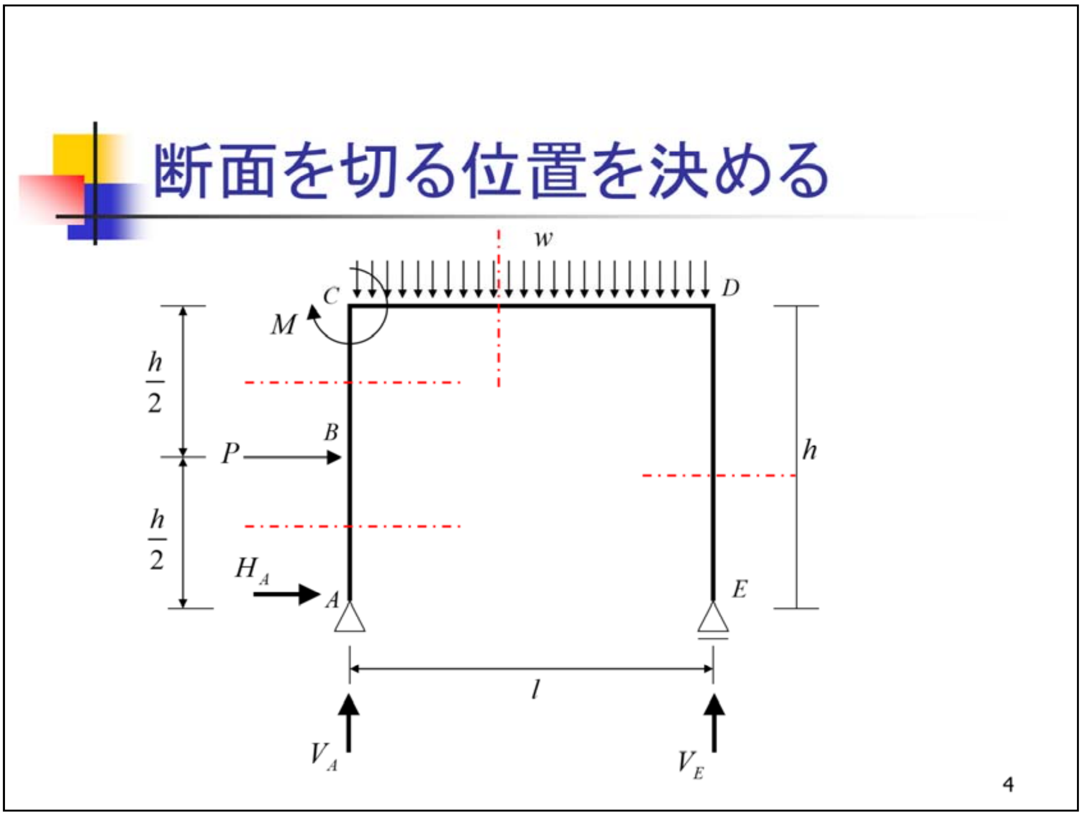
$-V_E l + M + P \cdot h/2 + wl \cdot l/2 = 0$

$$\Rightarrow \quad V_E = \frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$

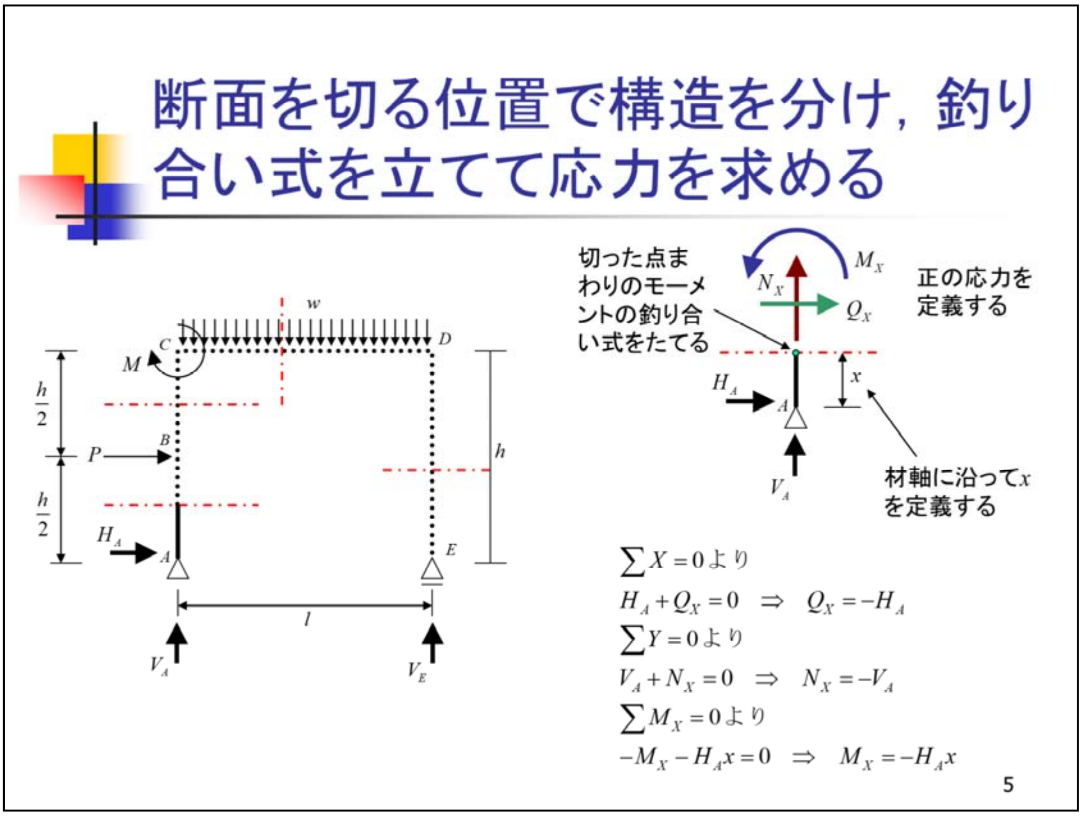
$$\Rightarrow \quad V_A = wl - V_E = -\frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$

3

このような単純支持梁型の問題では，まず，最初に反力を求める必要があります。
まず，未知の反力を定義し，x方向，y方向，モーメントの釣り合いから，反力を求めます。



次に，応力が変化するところで断面を切ります。
この問題では，4箇所切る必要があります。



次に，断面を切る位置で，構造を二つに分けます。

そして，釣り合い計算がやりやすい方の断面に，軸力，せん断力，曲げモーメントを定義します。

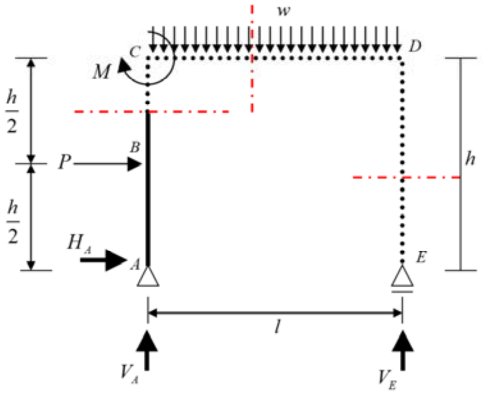
この場合，軸力，せん断力は，正の向きに定義します。軸力の正方向は，断面から離れて行く方向です。

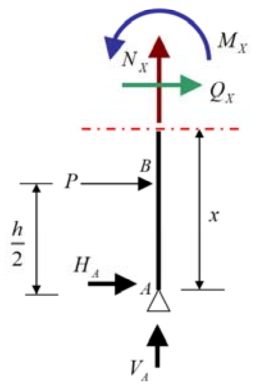
せん断力は，時計まわりに定義して，断面の外に現れるせん断力の方向が正となります。

曲げモーメントの正負はないので，どちら向きに定義しても構いませんが，断面の左右どちら側の表面が引っ張りになるかが重要です。

なお，部材の端点から断面までの距離は，xと置いて，計算します。

同様に





$\sum X = 0$ より

$H_A + P + Q_X = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_X = -H_A - P$

$\sum Y = 0$ より

$V_A + N_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_X = -V_A$

$\sum M_X = 0$ より

$-M_X - H_A x - P(x - h/2) = 0$

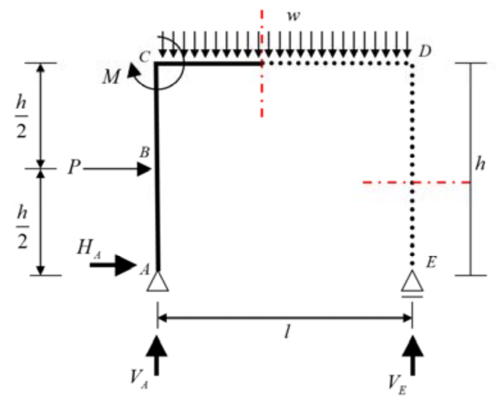
$\Rightarrow \quad M_X = -H_A x - P(x - h/2)$

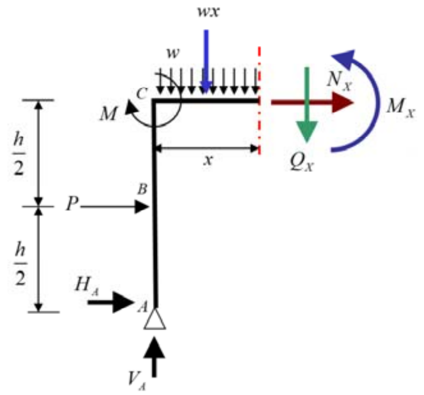
6

同様に，次の断面で，構造を二つに分け，応力を定義して，力の釣り合いから，応力を求めます。

なお，部材の端点から断面までの距離は，xと置いて，計算します。

この場合，B点からの距離をxと置くことも可能です。いずれにしても，どこの点からの距離をxにしたかを書いておくことが重要です。





$\sum X = 0$より

$H_A + P + N_X = 0 \ \Rightarrow \ N_X = -H_A - P$

$\sum Y = 0$より

$V_A - Q_X - wx = 0 \ \Rightarrow \ Q_X = V_A - wx$

$\sum M_X = 0$より

$-M_X + M + V_A x - H_A h - P(h/2) - wx(x/2) = 0$

$\Rightarrow \ M_X = M + V_A x - H_A h - P(h/2) - wx^2/2$

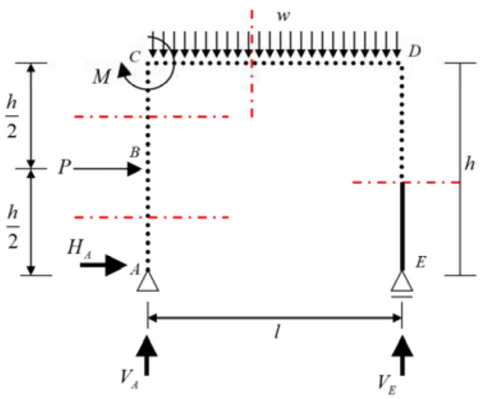
7

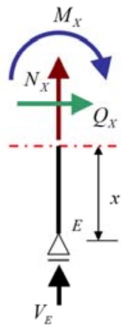
次も，同様です。

ただし，分布荷重が加わる場合は，分布荷重を集中荷重に直して計算します。

この場合は，C点から断面までの距離をxと置いていますので，分布荷重を集中荷重に直すとwxになります。

この時，曲げモーメントを微分するとせん断力の関数となっていることに注目して下さい。





$\sum X = 0$ より

$Q_X = 0$

$\sum Y = 0$ より

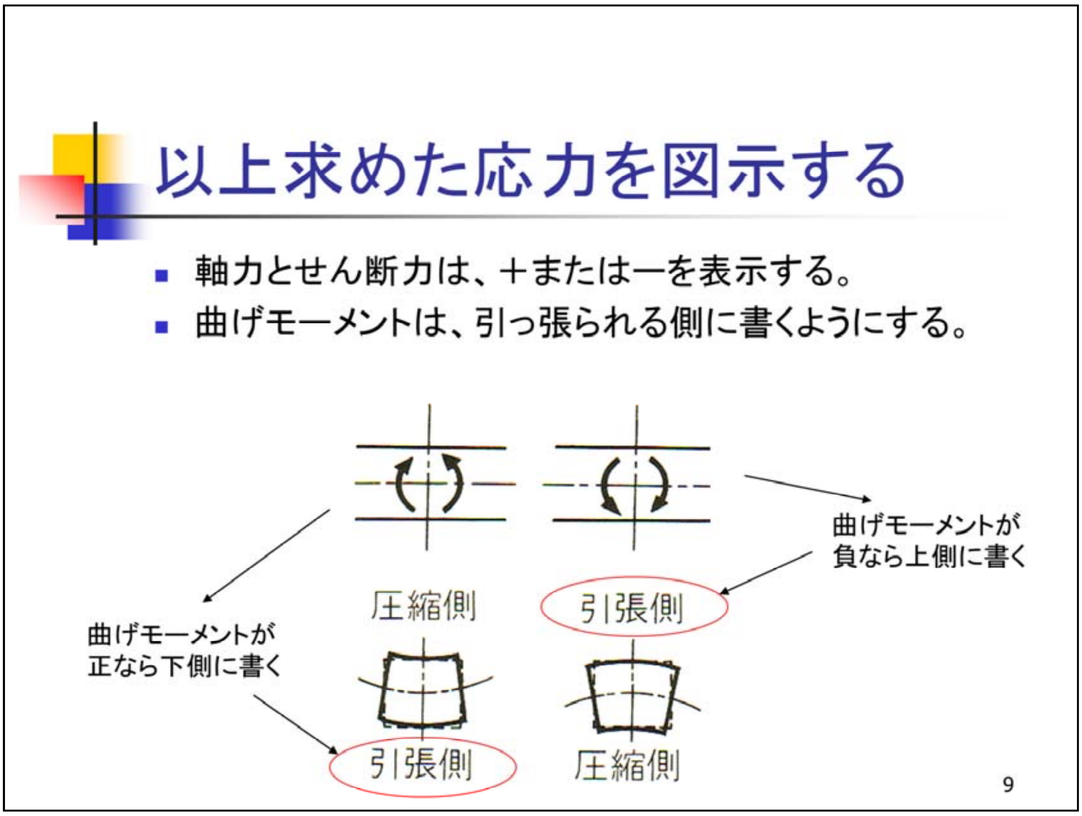
$V_E + N_X = 0 \quad \Rightarrow \quad N_X = -V_E$

$\sum M_X = 0$ より

$-M_X = 0 \quad \Rightarrow \quad M_X = 0$

8

この場合は，E側の構造を選択した方が計算が楽になります。

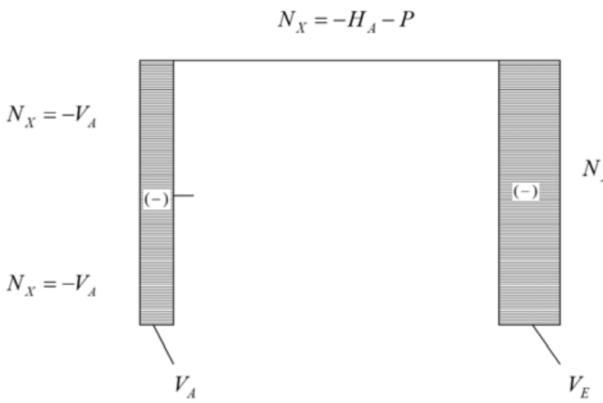


以上で求めた，軸力，せん断力，曲げモーメントの関数を図示します。

図示のルールは，すでに説明したように，軸力とせん断力は，どちらの方向に書いても構いませんが，＋と－の表示を示します。

曲げモーメントは，必ず部材の表面が引張になる側に描きます。

軸力図



$H_A = -P$

$V_E = \dfrac{2M + Ph}{2l} + \dfrac{wl}{2}$

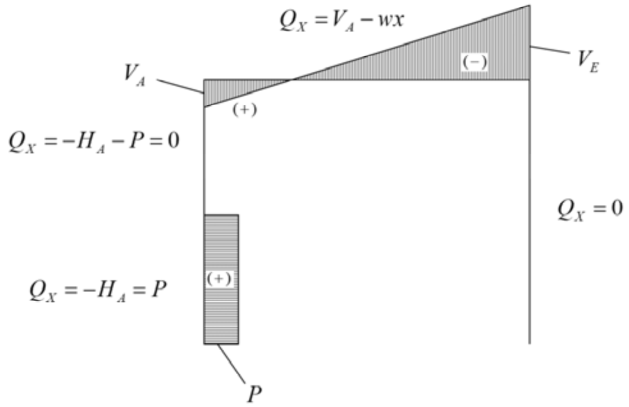
$V_A = wl - V_E = -\dfrac{2M + Ph}{2l} + \dfrac{wl}{2}$

10

軸力図を描くとこの図のようになります。

図には，代表的な点の値を書き込むようにします。また，符号を付けるのを忘れないで下さい。

せん断力図



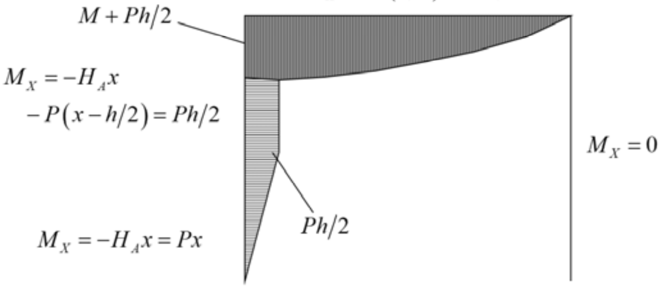
$$H_A = -P$$
$$V_E = \frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$
$$V_A = wl - V_E = -\frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$

11

せん断力についても，同様です。
端点の値は，必ず記入するようにしましょう。

曲げモーメント図

$$M_X = M + V_A x - H_A h - P(h/2) - wx^2/2$$
$$= M + V_A x + P(h/2) - wx^2/2$$



$$H_A = -P$$
$$V_E = \frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$
$$V_A = wl - V_E = -\frac{2M + Ph}{2l} + \frac{wl}{2}$$

12

曲げモーメント図は，部材のどちら側が引っ張りになるかをよく考えて描きます。

また，関数が2次以上になる場合は，必ず，間の点の値を計算して，線を描くようにしましょう。

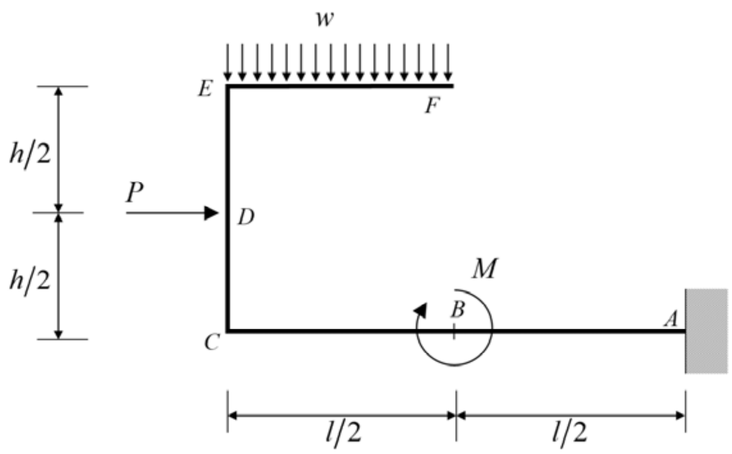
そうしないと，どちら側に凸になる関数かわからない場合があります。

分布荷重が作用する場合の曲げモーメントの最大値は，せん断力が0になる点で生じます。

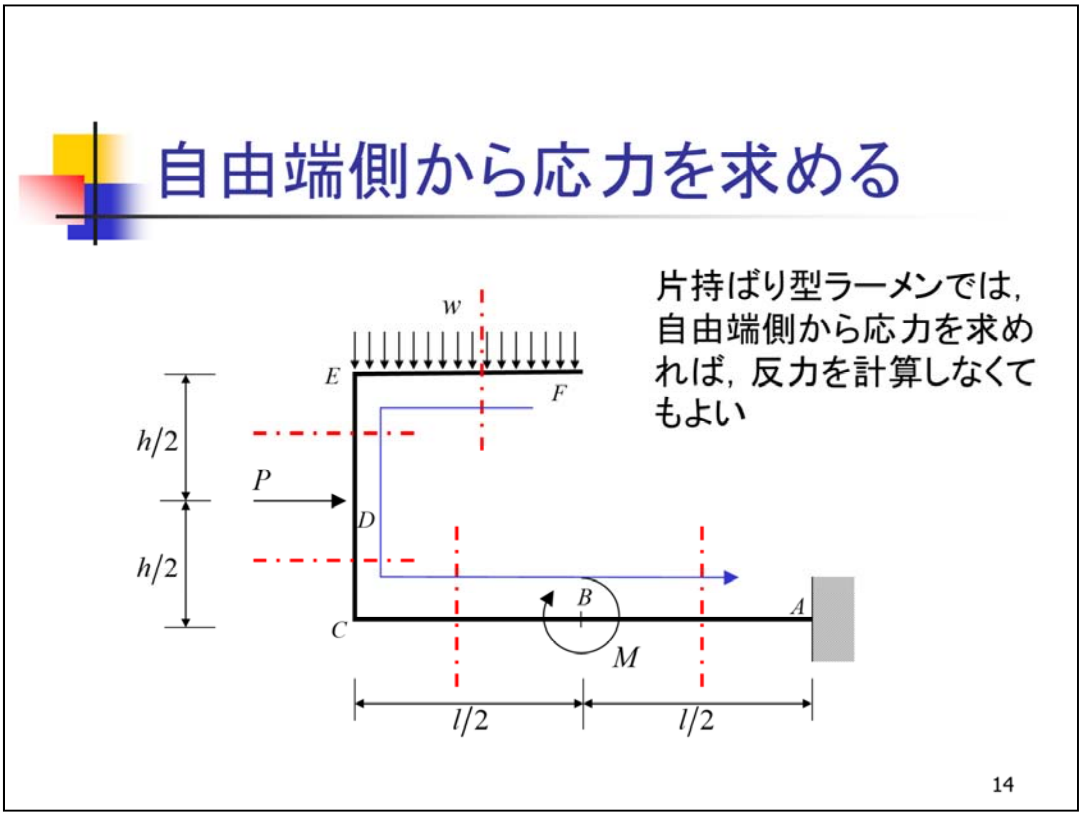
これは，曲げモーメント関数の微分がせん断力の関数になるためです。

できれば，せん断力が0になるxの値を計算し，これを曲げモーメントの式に代入して，曲げモーメントの最大値を求めましょう。

片持ばり型ラーメン



13



次に，片持梁型のラーメン構造の応力の求め方について説明します。

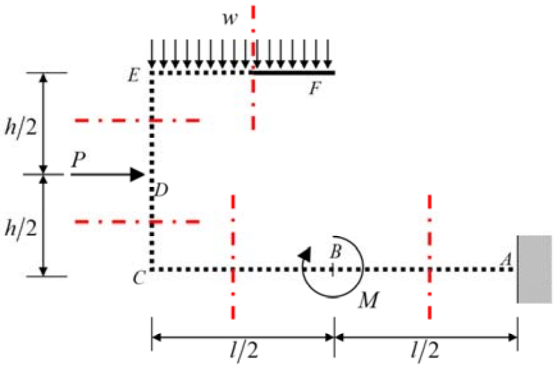
片持梁型では，一般に反力計算をしなくても，応力を求めることができます。

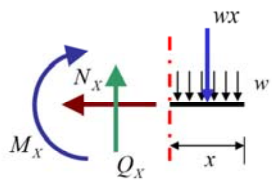
この場合は，必ず自由端側の構造に対して応力を求めます。

なお，反力の計算は，難しくないので，反力の計算をしておけば，固定端側の構造から応力を求めることもできるので便利です。

どちらのやり方も憶えておいて下さい。

断面を切る位置で構造を分け、釣り合い式を立てて応力を求める





$\sum X = 0$より

$N_x = 0$

$\sum Y = 0$より

$Q_x - wx = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = wx$

$\sum M_x = 0$より

$M_x + wx(x/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_x = -wx^2/2$

15

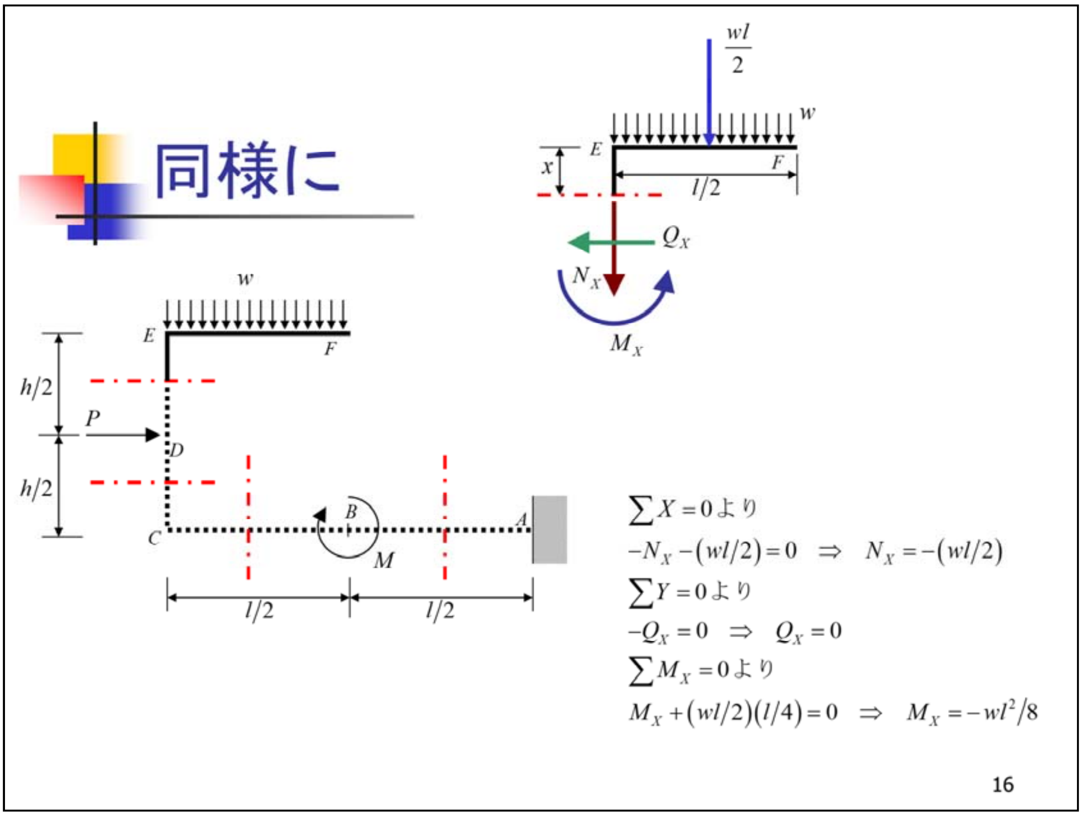
ここでは，反力を求めずに，自由端側の構造から応力を求めます。

xをどこから定義したかを記入することを忘れずに。

等分布荷重が作用する場合，曲げモーメントはxの2次関数になります。

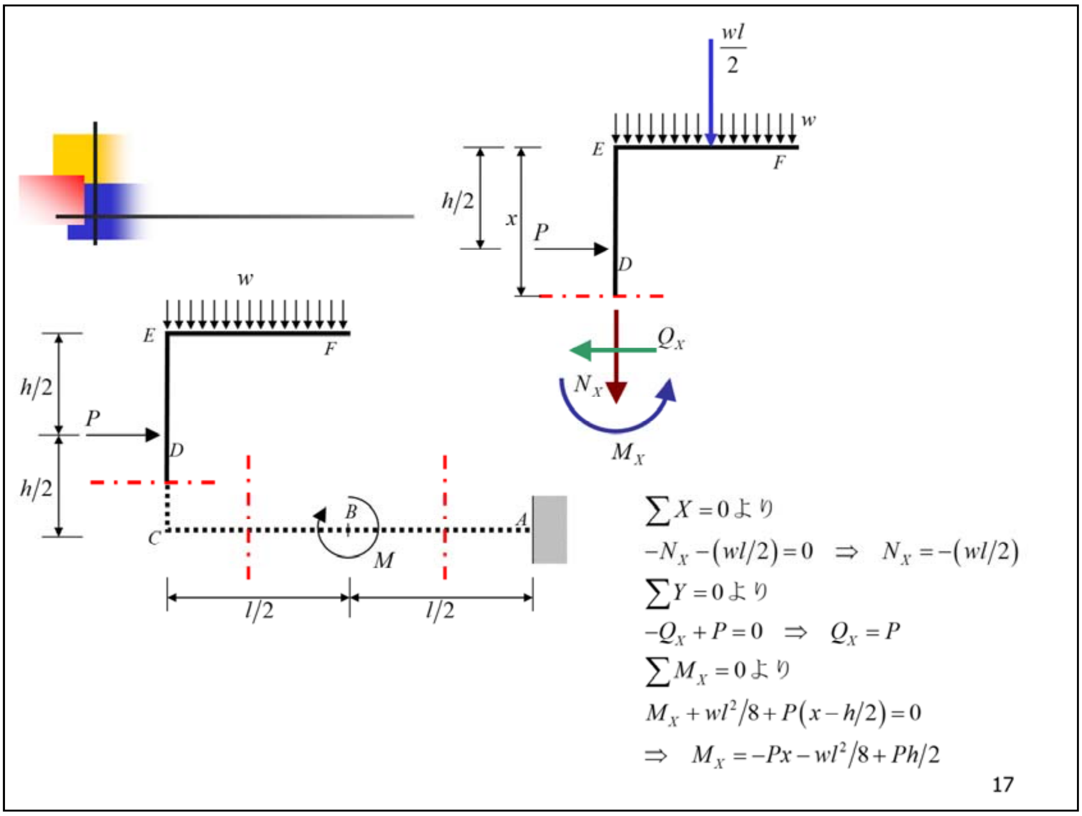
この場合，せん断力はxの1次関数になります。曲げモーメントを微分するとせん断力になっていることを確かめて下さい。

三角形分布荷重の場合は，3次関数になります。



同様に，次の断面の応力を求めます。

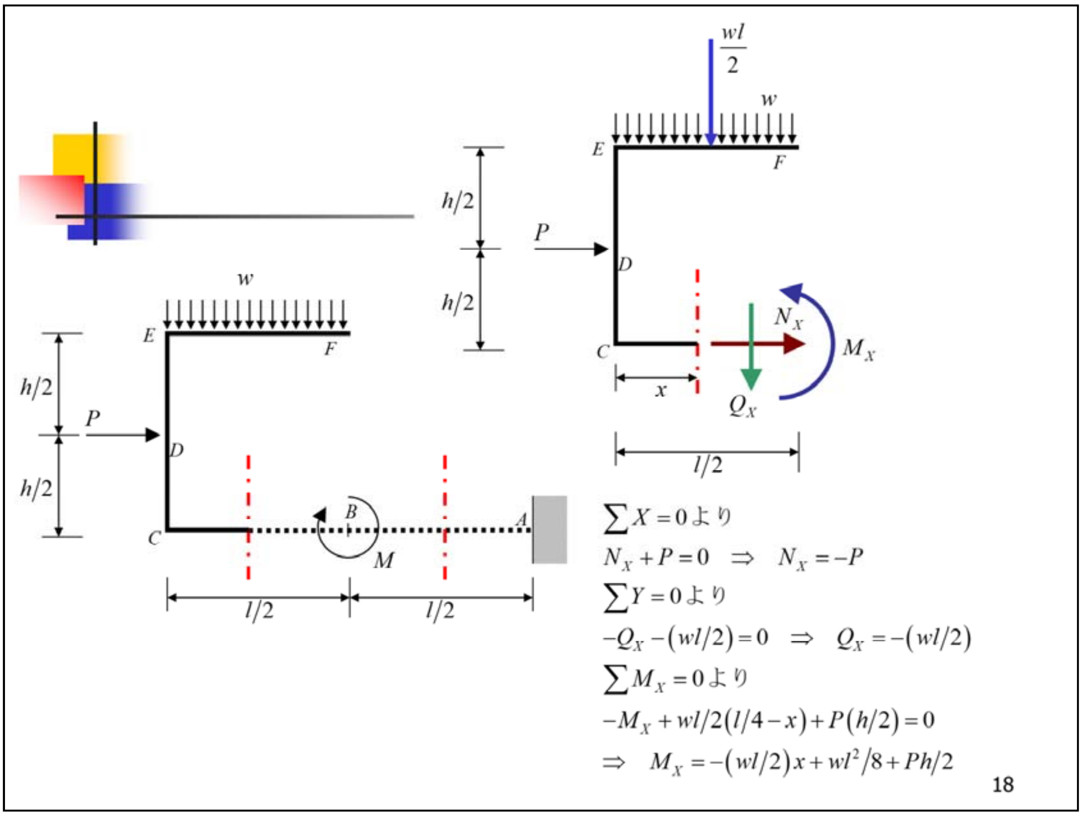
この場合，曲げモーメントは一定値になりますから，その微分であるせん断力は0になります。



同様に，次の断面の応力を求めます。

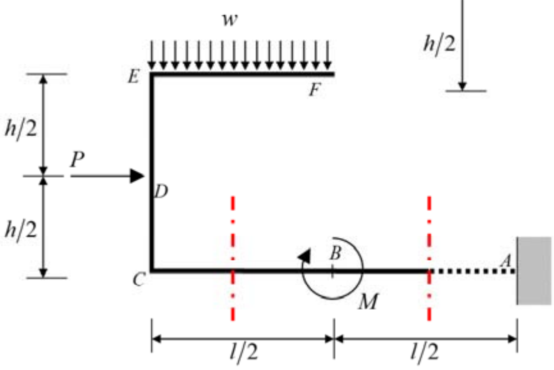
この場合，E点から断面までの距離をxとしていますが，D点からの距離をxと定義しても構いません。

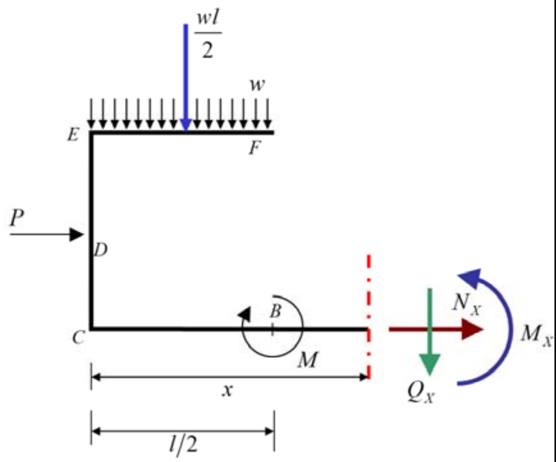
ただし，応力を描く時に，xをどこから定義したかを注意して描く必要があります。



次の断面も同様です。

ただし，この場合，xの定義の仕方で，分布荷重の集中荷重点が右になったり，左になったりしますが，どちらになってもモーメントの符号が変わるだけですから大丈夫です。





$\sum X = 0$ より

$N_X + P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_X = -P$

$\sum Y = 0$ より

$-Q_X - (wl/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_X = -(wl/2)$

$\sum M_X = 0$ より

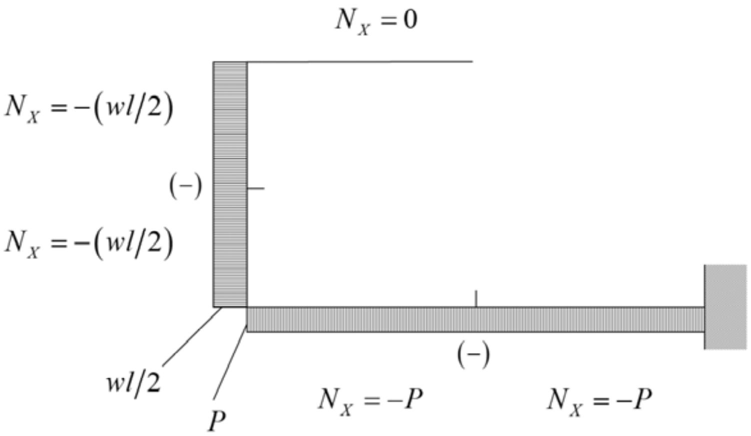
$-M_X - wl/2(x - l/4) + P(h/2) + M = 0$

$\Rightarrow \quad M_X = -(wl/2)x + wl^2/8 + Ph/2 + M$

19

最後の断面は，反力が計算されていれば，右の構造で計算することもできます。

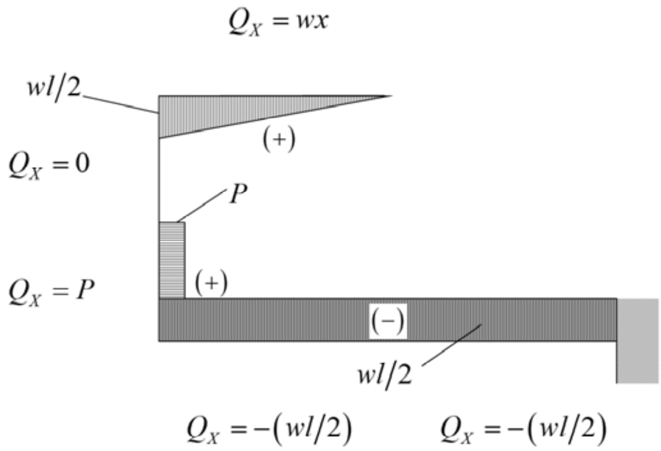
軸力図



20

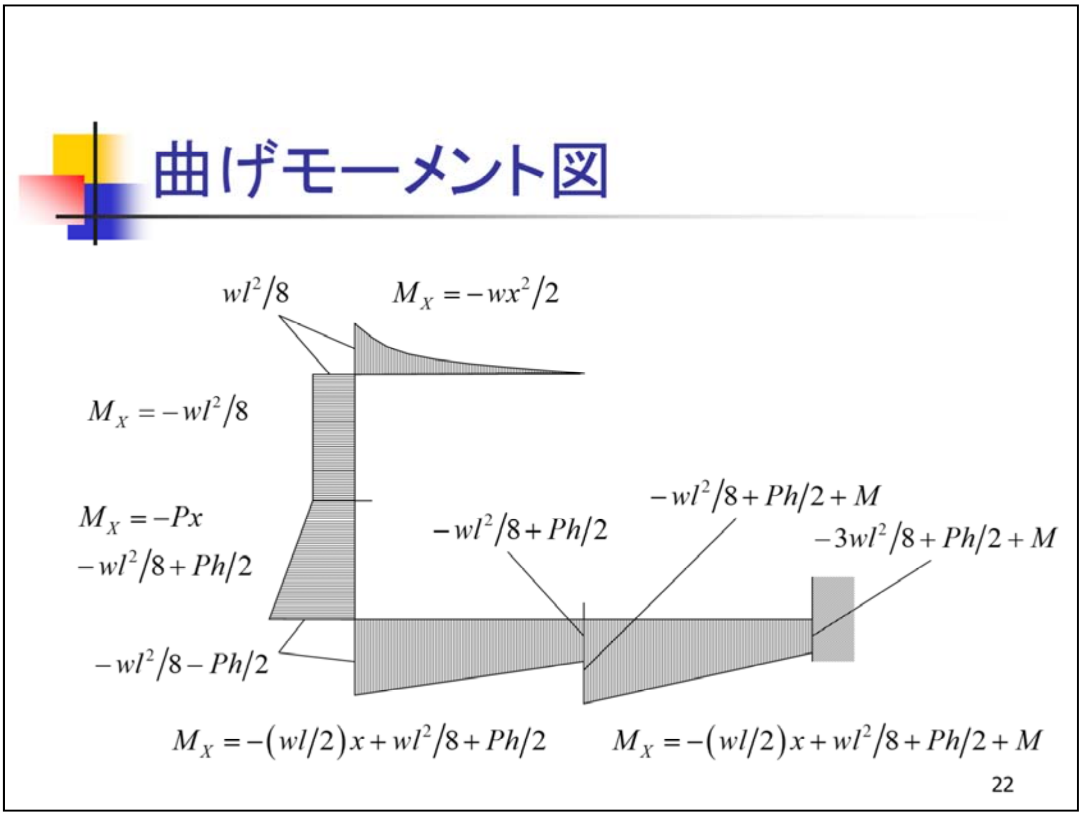
以上で算出した応力を図に描きます。
まず，軸力を描くとこの図のようになります。
端点には，値を記入します。また，符号を必ず書いて下さい。

せん断力図



21

せん断力も，軸力と同様です。

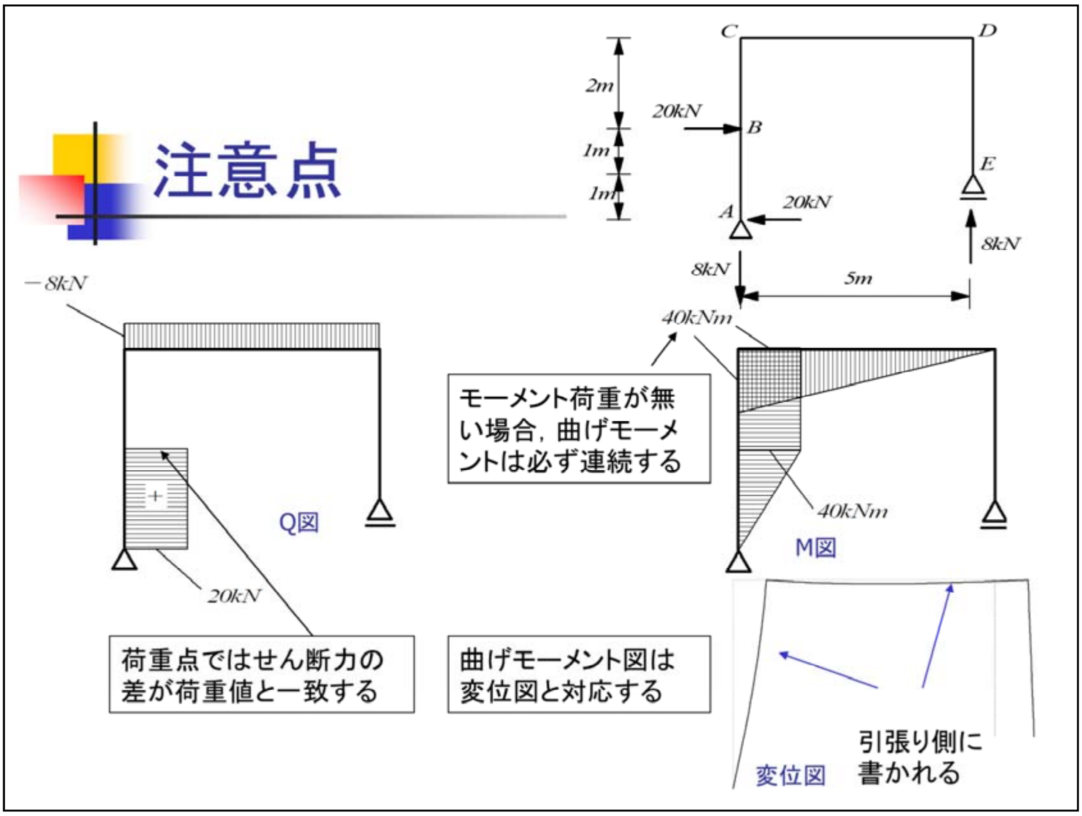


次に曲げモーメント図を描きます。

分布荷重が作用するところは，下に凸か，上に凸かを注意して描いて下さい。

この場合，中間点の値を計算すればわかります。

また，曲げモーメントは，モーメント荷重が加わっている点以外は必ず連続します。



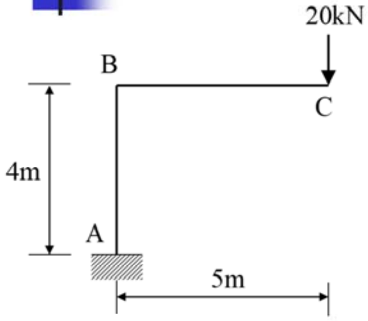
描いた応力の図が間違っていないかどうかをよく確かめて下さい。

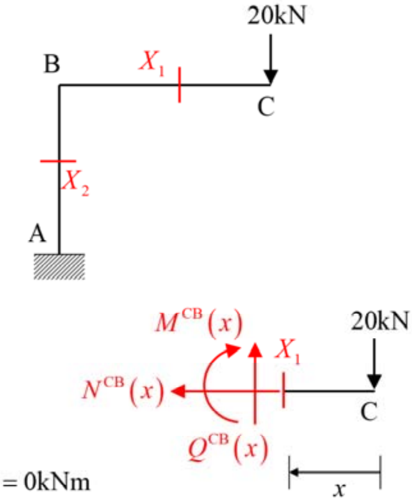
まず，集中荷重が加わる点では，せん断力の差が荷重値に一致しているはずです。

また，モーメント荷重が加わらない限り，曲げモーメントは連続します。

また，曲げモーメントの描かれる方向は，骨組の変形と対応しますから，変形が予測できれば，曲げモーメントの描かれている方向が正しいかどうかを判断できます。

演習問題1の解き方（その1）





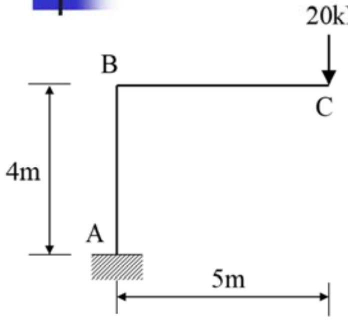
$$\sum X = 0:\quad N^{CB}(x) = 0\text{kN}$$

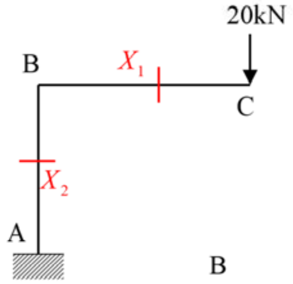
$$\sum Y = 0:\quad Q^{CB}(x) = 20\text{kN}$$

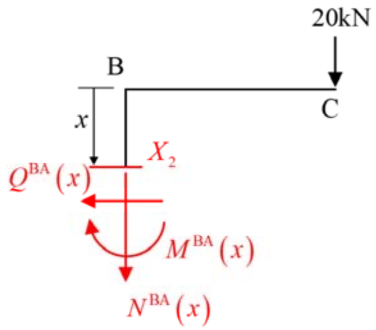
$$\sum M_{X2} = 0:\quad M^{CB}(x) = -20x \quad \begin{cases} M^{CB}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{CB}(5) = -100\text{kNm} \end{cases}$$

24

演習問題1の解き方（その2）







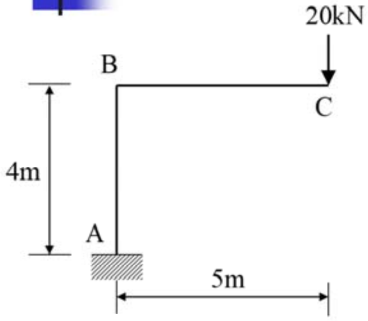
$$\sum Y = 0: \quad N^{BA}(x) = -20\text{kN}$$

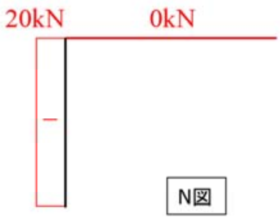
$$\sum X = 0: \quad Q^{BA}(x) = 0\text{kN}$$

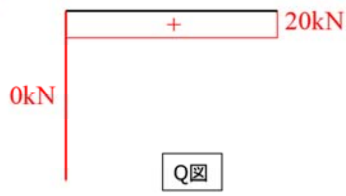
$$\sum M_{X2} = 0: \quad M^{BA}(x) = -100\text{kNm}$$

25

演習問題1の解き方（その3）

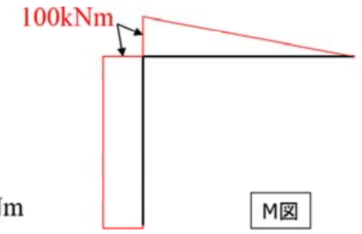






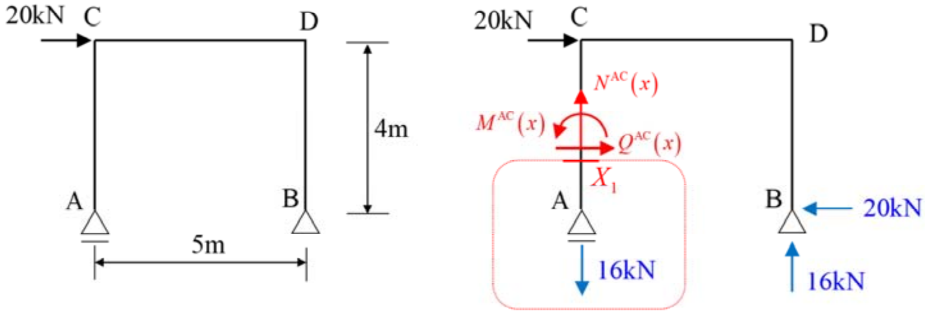
$$N^{CB}(x) = 0\text{kN}$$
$$Q^{CB}(x) = 20\text{kN}$$
$$M^{CB}(x) = -20x$$
$$\begin{cases} M^{CB}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{CB}(5) = -100\text{kNm} \end{cases}$$

$$N^{BA}(x) = -20\text{kN}$$
$$Q^{BA}(x) = 0\text{kN}$$
$$M^{BA}(x) = -100\text{kNm}$$



26

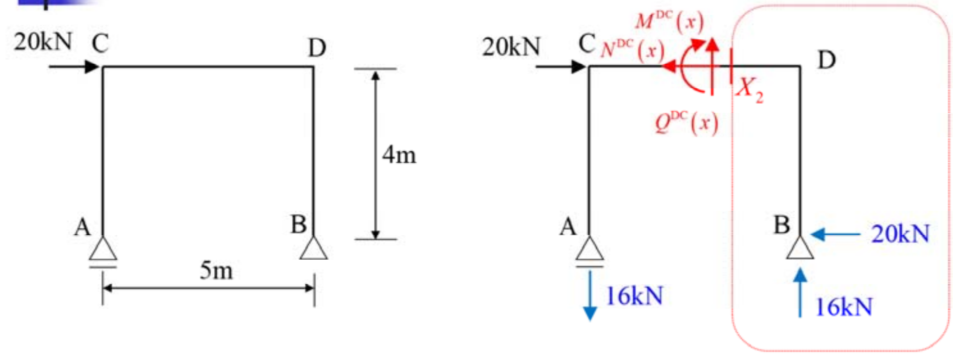
演習問題2の解き方(その1)



$$\sum Y = 0: \quad N^{AC}(x) = 16\text{kN}$$
$$\sum X = 0: \quad Q^{AC}(x) = 0\text{kN}$$
$$\sum M_{X1} = 0: \quad M^{AC}(x) = 0\text{kNm}$$

27

演習問題2の解き方（その2）



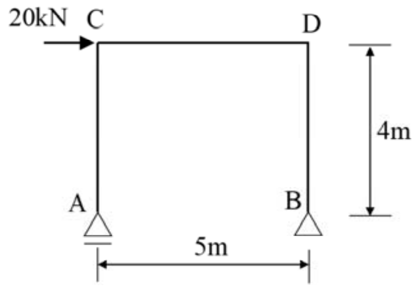
$$\sum X = 0: \quad N^{DC}(x) = -20\text{kN}$$

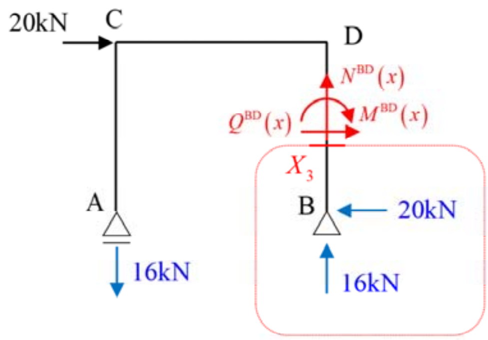
$$\sum X = 0: \quad Q^{DC}(x) = -16\text{kN}$$

$$\sum M_{X1} = 0: \quad M^{DC}(x) = 16x - 80 \quad \begin{cases} M^{DC}(0) = -80\text{kNm} \\ M^{DC}(5) = 0\text{kNm} \end{cases}$$

28

演習問題2の解き方（その3）





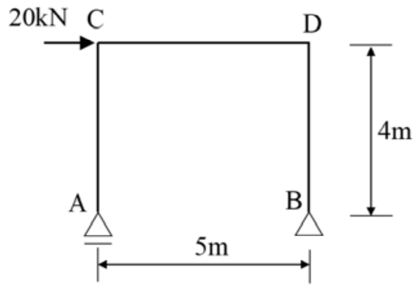
$$\sum Y = 0: \quad N^{BD}(x) = -16\text{kN}$$

$$\sum X = 0: \quad Q^{BD}(x) = 20\text{kN}$$

$$\sum M_{X1} = 0: \quad M^{BD}(x) = -20x \quad \begin{cases} M^{BD}(0) = 0\text{kNm} \\ M^{BD}(4) = -80\text{kNm} \end{cases}$$

29

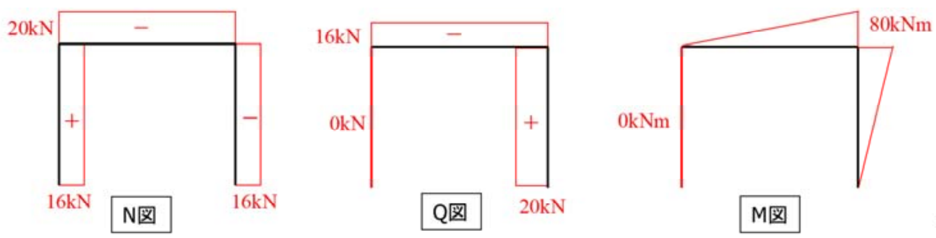
演習問題2の解き方(その4)



$$N^{AC}(x)=16\text{kN}$$
$$Q^{AC}(x)=0\text{kN}$$
$$M^{AC}(x)=0\text{kNm}$$

$$N^{DC}(x)=-20\text{kN}$$
$$Q^{DC}(x)=-16\text{kN}$$
$$M^{DC}(x)=16x-80 \quad \begin{cases} M^{DC}(0)=-80\text{kNm} \\ M^{DC}(5)=0\text{kNm} \end{cases}$$

$$N^{BD}(x)=-16\text{kN}$$
$$Q^{BD}(x)=20\text{kN}$$
$$M^{BD}(x)=-20x \quad \begin{cases} M^{BD}(0)=0\text{kNm} \\ M^{BD}(4)=-80\text{kNm} \end{cases}$$



30